A. ALEKSEEV

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

A.ALEKSEEV

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

PRÉFACE

Le présent ouvrage réunit des problèmes d'électrodynamique classique que l'auteur utilise depuis plusieurs années au cours des exercices pratiques à l'Institut des ingénieurs physiciens de Moscou et propose aux élèves en qualité de devoirs individuels. La majeure partie des problèmes sont problèmes originaux indépendants les uns des autres. En même temps, le recueil contient un certain nombre de problèmes types connus, ayant pour but d'illustrer les méthodes de résolution utilisées. Les problèmes proposés sont gradués en difficul-fés mais la plupart d'eux sont accessibles à tous ceux qui se sont amiliarisés avec la théorie du champ électromagnétique.

Les solutions de nombreux problèmes sont décrites en détail surtout dans les cas où l'on utilise des idées et des méthodes nouvelles par rapport à ce qui précède. Toutefois, le recueil comporte aussi un grand nombre de problèmes de même type relatifs aux diverses parties du cours d'électrodynamique. Dans de tels cas on ne donne que des réponses et des indications sommaires pour la résolution. De tels problèmes s'avèrent bien utiles pour rédiger les travaux de contrôle et les devoirs individuels ainsi que pour l'autocontrôle lors de l'étude de l'électrodynamique. Si le lecteur éprouve des difficultés à résoudre ces problèmes, cela signifie qu'il n'a pas bien assimilé la partie correspondante du cours d'électrodynamique et qu'il doit donc la réviser.

Le contenu du recueil recouvre les questions de l'électrodynamique dans le vide. A côté de la densité volumique on a introduit les notions de densité superficielle et de densité linéique de charge ainsi que celle de densité superficielle de courant, ce qui a permis d'élargir considérablement le cercle de questions traitées et d'illustrer diver-

ses méthodes appliquées aussi bien en Electrodynamique dans le vide qu'en Electrodynamique des milieux continus.

Chaque chapitre est précédé par un rappel de notions théoriques alors que les annexes donnent des renseignements nécessaires relatifs à l'analyse vectorielle, au calcul tensoriel et aux fonctions spéciales. Les formules données ont pour but d'économiser le temps du lecteur lors de la résolution des problèmes. Elles ont aussi permis de réduire le volume des solutions et donc celui de tout le recueil.

A. Alexéev

NOTATIONS ET SYMBOLES ADOPTÉS

On utilise partout le système d'unités de Gauss.

Les vecteurs sont désignés par des caractères gras et leurs modules par des caractères fins. La décomposition d'un vecteur **A** suivant les vecteurs unitaires $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$ et $\mathbf{1}_z$ d'un système de coordonnées cartésiennes s'écrit sous l'une de deux formes

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{1}_x + A_y\mathbf{1}_y + A_z\mathbf{1}_z = A_1\mathbf{1}_x + A_2\mathbf{1}_y + A_3\mathbf{1}_z.$$

Si un indice de vecteur ou de tenseur, désigné par une lettre grecque, se rencontre deux fois dans une expression donnée, on suppose que la sommation sur cet indice se fait de 1 à 3. Dans ce cas, le signe de somme $\sum$ est omis. Par exemple,

$$a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Si ces indices sont désignés par une lettre latine, la sommation se fait de 1 à 4:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4.$$

Toutes les intégrales, qu'elles soient simples ou multiples, sont désignées par un seul et même symbole $\int$ et ne se distinguent l'une de l'autre que par la désignation de l'élément d'intégration: $dV = dxdydz = d\mathbf{r}$ pour un élément de volume; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ pour un élément de surface et $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau}\, dl$ pour un élément de contour orienté. Ici, $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à la surface d'intégration et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unitaire de la tangente au contour d'intégration. Le symbole $\oint$ désigne l'intégrale sur une surface fermée avec vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de la normale extérieure ou l'intégrale sur un contour orienté fermé dont le sens de parcours est donné par le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}$. Dans le cas des intégrales définies, les limites d'intégration sont parfois omises. Dans ce cas, l'intégration est étendue sur la région où la fonction sous le signe somme est non nulle.

La décomposition en série de Fourier est notée

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

ou, dans un espace à trois dimensions,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k},$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \int \varphi(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{r}.$$

Une fonction périodique $f(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est décomposée en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t},$$

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega_0 t}\, dt.$$

La dérivée totale par rapport au temps est souvent désignée par un point placé au-dessus de la fonction $\frac{dF}{dt} \equiv \dot{F}$. La dérivée d'une fonction $\Phi(x)$ au point $x = x_0$ est représentée comme $\frac{d\Phi(x_0)}{dx}$.

L'indice 0 placé en bas et à droite de chaque symbole (lettre) désigne une grandeur constante dans le temps et indépendante des coordonnées.

Si l'argument d'une fonction est représenté sous la forme αt, $\mathbf{kr}$ ou βr, les facteurs α, $\mathbf{k}$ et β sont indépendants des coordonnées et du temps.

$\mathbf{A}$ — potentiel vecteur

c — 1) constante électrodynamique égale à la vitesse de la lumière dans le vide ; 2) constante arbitraire ; 3) demi-axe d'un ellipsoïde

$\mathbf{d}$ — moment électrique dipolaire

$D_{\alpha\beta}$ — composantes du tenseur de moment électrique quadrupolaire

e — charge ponctuelle (charge d'une particule)

$\mathbf{E}$ — intensité de champ électrique

$\mathscr{E}$ — 1) énergie ; 2) énergie cinétique d'une particule non relativiste

$\mathbf{F}$ — force

g — densité d'impulsion de champ électromagnétique
$\hbar$ — constante de Planck égale à $1{,}054 \cdot 10^{-27}$ erg·s
H — intensité de champ magnétique
i — densité superficielle de courant
I — intensité de rayonnement
j — densité volumique de courant
J — 1) intensité de courant; 2) moment d'inertie
k — 1) vecteur d'onde; 2) vecteur variable de décomposition en intégrale triple de Fourier
l — dimension linéaire d'un système chargé ou d'une portion de l'espace
L — 1) contour à intégration dans une intégrale curviligne; 2) longueur
m — masse
M — moment angulaire (moment cinétique)
N — 1) moment des forces; 2) vecteur unité
n — 1) vecteur unitaire de la normale à une surface (de la normale extérieure à une surface fermée); 2) vecteur unitaire du rayon vecteur **r** du point d'observation *); 3) vecteur unité
p — impulsion
P — impulsion totale d'un système mécanique
q — densité linéique de charge
Q — charge totale
R — rayon d'une circonférence, d'un cylindre ou d'une sphère
r — 1) module du rayon vecteur **r**; 2) coordonnée sphérique; 3) coordonnée cylindrique
S — surface (aire)
s — vecteur de Poynting
t — temps
T — 1) période; 2) énergie cinétique d'une particule relativiste
$T_{\alpha\beta}$ — tenseur des tensions de Maxwell
U — énergie potentielle
v — vitesse
V — volume
W — 1) énergie d'un champ électromagnétique; 2) énergie magnétique de l'interaction d'un courant avec un champ magnétique extérieur
w — densité d'énergie d'un champ électromagnétique
$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ — composantes du rayon vecteur **r** en coordonnées rectangulaires cartésiennes
θ — angle polaire d'un système de coordonnées sphériques
λ — longueur d'onde divisée par 2π
μ — moment magnétique

---

*) Par point d'observation on entend le point où l'on mesure la grandeur considérée. (*N.d.T.*)

μ — masse réduite
ρ — densité volumique de charge
σ — densité superficielle de charge
τ — 1) vecteur unitaire de la normale à une surface ou à un contour orienté ; 2) densité de moment dipolaire d'une couche bipolaire
φ — potentiel scalaire
ψ — 1) angle azimutal d'un système de coordonnées sphériques ; 2) angle polaire d'un système de coordonnées cylindriques ; 3) angle formé entre deux directions
ω — 1) fréquence cyclique ; 2) vitesse angulaire de rotation
Ω — 1) angle solide ; 2) fréquence cyclique
∇ — opérateur nabla

PROBLÈMES

CHAPITRE PREMIER

CHAMP ÉLECTRIQUE STATIQUE

La grandeur fondamentale qui caractérise un champ électrique dans le vide est le vecteur **E** = **E** (**r**) de l'intensité de ce champ. Le vecteur **E** (**r**) représente la force qui s'exerce sur une charge d'essai unité placée en un point de rayon vecteur **r**.

Le présent chapitre est consacré au champ électrostatique produit par des charges fixes. La distribution de charges dans l'espace se décrit par la densité volumique ρ (**r**), celle sur une surface chargée par la densité superficielle σ (**r**) et celle sur un contour linéaire chargé par la densité linéique q (**r**). Une surface chargée est considérée comme la limite vers laquelle tend une surface d'épaisseur finie quand elle s'amincit indéfiniment à condition que la charge σ par unité de surface reste invariable. De façon analogue, un contour linéaire chargé (ou tout simplement une charge linéique) est la limite vers laquelle tend un cylindre long chargé quand il s'amincit indéfiniment à condition que la charge q par unité de longueur reste invariable. Les formes de la surface chargée et du contour d'une charge linéique peuvent être quelconques. En outre, l'espace peut contenir des charges ponctuelles distinctes e_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

L'intensité de champ électrostatique satisfait aux équations de Maxwell

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

$$\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad \text{(I.2)}$$

Si un ensemble de charges électriques est concentré dans une portion limitée de l'espace, l'intensité de champ électrostatique qu'il produit à de grandes distances r décroît comme $1/r^2$ ou plus rapidement. Cette assertion constitue une condition supplémentaire aux équations de Maxwell (I.1) et (I.2) pour la détermination de **E** dans un espace illimité.

Au passage à travers une surface chargée, la composante normale $E_n = \mathbf{En}$ de l'intensité de champ électrique subit une variation en forme de saut :

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \qquad \text{(I.3)}$$

alors qu'il y a continuité de la composante tangentielle

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \tag{I.4}$$

Les indices 1 et 2 indiquent ici l'intensité de champ électrique dans les première et deuxième régions situées de part et d'autre de la surface chargée. Le vecteur unitaire **n** de la normale à cette surface est dirigé de la première région vers la deuxième. Les relations (I.3) et (I.4) constituent les conditions aux limites en électrostatique.

Généralement, le second membre de l'équation de Maxwell (I.2) fait intervenir la densité volumique de charge ρ continue par morceaux alors que la densité superficielle σ est prise en compte dans les conditions aux limites.

Il existe aussi une autre méthode de résolution du problème électrostatique qui n'exige pas d'énoncer les conditions aux limites. La distribution superficielle de charge $\sigma(\mathbf{r})$ est prise en compte dans la densité volumique $\rho(\mathbf{r})$ à l'aide de la fonction impulsion de Dirac (fonction delta) et la solution des équations de Maxwell est cherchée d'emblée dans tout l'espace. Mathématiquement, une telle méthode est moins commode parce que le second membre de l'équation (I.2) se transforme en une fonction singulière qui devient égale à l'infini aux points des surfaces chargées.

L'intensité de champ électrique satisfait au théorème électrostatique de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 4\pi Q, \tag{I.5}$$

où Q est la charge totale contenue à l'intérieur d'une surface fermée S. Dans le cas général, cette charge est représentée par l'ensemble de charges volumiques, superficielles, linéiques et ponctuelles.

En plus de son intensité **E**, un champ électrique statique se caractérise par son potentiel φ qui est défini par la relation

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{I.6}$$

La différence de potentiel entre un premier et un deuxième points de l'espace représente le travail qu'il faut effectuer contre les forces du champ pour transporter la charge unité du deuxième point de l'espace au premier point.

Le potentiel φ satisfait à l'équation de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \tag{I.7}$$

et aux conditions à la limite sur la surface de séparation des régions

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial \mathbf{n}} = 4\pi\sigma, \tag{I.8}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{I.9}$$

Dans le cas où le second membre de l'équation (I.7) est nul, cette dernière s'appelle équation de Laplace. En résolvant les équations de Poisson et de Laplace, il convient d'avoir en vue que le potentiel est une fonction continue en tous les points de l'espace où la densité volumique de charge est limitée. Au surplus, le potentiel est continu au passage à travers une surface chargée si la densité superficielle de charge au point donné est limitée. La condition à la limite sur un contour linéaire chargé avec une densité linéique q s'écrit quand $r \rightarrow 0$ sous la forme $\varphi = -2q \ln r +$ const, r étant la distance la plus courte entre le point d'observation et le contour considéré. Lorsque les charges se situent dans une région finie de l'espace, le potentiel à une distance infiniment grande de ces charges est nul. Après avoir trouvé le potentiel, on détermine l'intensité de champ électrique en calculant le gradient (I.6).

Et réciproquement, si c'est le vecteur $\mathbf{E}$ qui est trouvé d'après le théorème de Gauss (I.5) ou par une autre méthode quelconque, on détermine le potentiel φ du champ électrique à partir de la relation (I.6) considérée comme une équation différentielle par rapport à la fonction φ cherchée.

Dans les problèmes d'électrodynamique on étudie souvent le champ électrique des sources infiniment étendues bien que les systèmes de charges réels aient toujours des dimensions finies. Les résultats qu'on obtient dans ce cas présentent un intérêt pratique parce que le champ produit par des sources infiniment étendues décrit correctement, à des distances petites par rapport aux dimensions linéaires des systèmes réels, le champ électrique engendré par ces systèmes. Par exemple, le champ électrique produit par un cylindre indéfini chargé coïncide, avec une haute précision, avec le champ d'un cylindre analogue ayant une longueur suffisamment grande mais de valeur finie, si la distance entre le point d'observation et ce cylindre est petite par rapport à la longueur de celui-ci. La différence entre ces champs s'observe au voisinage des faces terminales du cylindre ainsi qu'à des distances comparables à sa longueur.

Le potentiel et l'intensité du champ électrostatique produit par une charge ponctuelle ont pour expressions

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{I.10}$$

où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont les rayons vecteurs respectivement du point d'observation et du point d'emplacement de la charge (loi de Coulomb).

En électrostatique, le principe de superposition est valable : le champ électrique produit par un système de plusieurs charges représente la superposition (la somme) des champs engendrés par chaque charge séparément. Autrement dit, en présence d'autres systèmes chargés, les charges produisent le même champ que dans le vide.

Si les charges sont réparties avec une densité volumique $\rho(\mathbf{r}')$, on peut, en utilisant la loi de Coulomb pour la charge ponctuelle élémentaire $\rho(\mathbf{r}')\,dV'$ d'une part et le principe de superposition des potentiels d'autre part, représenter le potentiel $\varphi(\mathbf{r})$ et l'intensité $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ du champ électrique au point d'observation de rayon vecteur $\mathbf{r}$ sous la forme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \text{(I.11)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad \text{(I.12)}$$

Le potentiel (I.11) satisfait à l'équation de Poisson (I.7) et constitue sa solution générale dans l'espace illimité si l'intégrale de volume est convergente. Dans ce cas, les conditions aux limites (I.8) et (I.9). sur la surface de séparation des charges électriques et du vide se trouvent automatiquement réalisées. Dans le cas où l'intégrale (I.11) n'est pas convergente ou ne peut pas être calculée par voie analytique, le potentiel du champ électrique est déterminé en résolvant les équations de Poisson (I.7), compte tenu des conditions aux limites (I.8) et (I.9).

Parfois, au lieu des charges volumiques, l'espace contient des surfaces chargés et des contours linéaires chargés. Dans ce cas, le potentiel est calculé au moyen de la formule

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int \frac{q(\mathbf{r}')\,dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \text{(I.13)}$$

et l'intensité du champ électrique est déterminée d'après la relation (I.6).

Le calcul direct des intégrales (I.11) et (I.13) est, en règle générale, difficile à réaliser. C'est pourquoi, pour pouvoir déterminer le champ électrostatique à grande distance du système de charges, on a élaboré une méthode permettant de calculer ces intégrales avec toute la précision voulue. Cette méthode consiste à développer la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en une série suivant le petit paramètre $\frac{x'_\alpha}{r}$, où les rayons vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont pris dans un système de coordonnées dont l'origine est placée à l'intérieur d'un système de charges dont la dimension linéaire maximale est l. Il en résulte qu'à grande distance $r \gg l$ du système chargé le potentiel sera représenté par une série dont la convergence est infiniment rapide

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{dr}}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5} + \ldots, \qquad \text{(I.14)}$$

où pour la répartition de charge avec une densité volumique ρ (r) sont introduites les notations suivantes:

$$Q = \int \rho(\mathbf{r})\, dV, \tag{I.15}$$

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\, dV, \tag{I.16}$$

$$D_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, \rho(\mathbf{r})\, dV, \tag{I.17}$$

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{1}_x + x_2 \mathbf{1}_y + x_3 \mathbf{1}_z. \tag{I.18}$$

Les grandeurs (I.15), (I.16) et (I.17) s'appellent respectivement charge totale, moment électrique dipolaire et tenseur de moment électrique quadrupolaire du système chargé. Ces dernières caractérisent le degré d'écart que la distribution de charge du système présente par rapport à une symétrie centrale. Dans un système chargé à symétrie sphérique, les quantités (I.16) et (I.17), de même que les moments de multipôles de rang plus élevé, sont nulles, alors que le potentiel aux points extérieurs est un potentiel coulombien $\varphi =$ $= Q/r$ où r est la distance entre le centre de symétrie du système et le point d'observation.

Si les charges sont réparties sur la surface avec une densité superficielle σ, la charge totale, le moment électrique dipolaire et le tenseur de moment électrique quadrupolaire sont exprimés respectivement par les intégrales (I.15) à (I.17) dans lesquelles on a opéré le changement $\rho dV \rightarrow \sigma dS$ et l'intégration se fait sur la surface chargée. De façon analogue, pour un contour linéaire, chargé avec une densité linéique q, on opère dans les intégrales (I.15) à (I.17) le changement $\rho\, dV \rightarrow q\, dl$ et l'intégration se fait sur le contour chargé.

Dans le cas des charges e_i placées en des points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), la densité volumique de charge s'exprime par la fonction delta

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{I.19}$$

et les expressions (I.16) et (I.17) prennent la forme

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \tag{I.20}$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i\, (3x_{i\alpha} x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}). \tag{I.21}$$

Pour un corps de révolution uniformément chargé, le tenseur de moment électrique quadrupolaire prend sa forme la plus simple dans le système de coordonnées cartésiennes dont l'un des axes coïncide avec l'axe de symétrie axiale. Dans ce cas, les seules composantes

non nulles sont les composantes diagonales du tenseur $D_{\alpha\beta}$. Si par exemple, l'axe des Z est choisi le long de l'axe de symétrie du corps de révolution, les composantes non nulles du tenseur $D_{\alpha\beta}$ ont pour grandeur :

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{2} D_{33}. \qquad (I.22)$$

La grandeur $D_{33} \equiv D$ est appelée moment électrique quadrupolaire du corps de révolution.

Par analogie avec le cas de charges ponctuelles (I.19), il est possible d'introduire, à l'aide de la fonction delta, la notion de densité volumique ρ aussi dans le cas où est donnée la distribution superficielle ou linéique de charges. Après cela, on peut se servir des formules obtenues précédemment pour la distribution volumique avec une densité $\rho(\mathbf{r})$.

Un système de deux plans parallèles infiniment rapprochés, dont les densités superficielles de charges des portions opposées sont égales en grandeur absolue mais de signes contraires s'appelle couche dipolaire ou couche bipolaire. Cette couche se caractérise par la densité de moment électrique dipolaire τ. En tout point sur la surface de la couche bipolaire le vecteur τ est parallèle à la normale $\mathbf{n}$ et dirigé de la face négative vers la face positive. Quand deux surfaces parallèles chargées de signes contraires se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, la densité superficielle de charges sur les portions opposées croît en valeur absolue, de sorte que la densité de moment électrique dipolaire τ prend une valeur finie. L'élément $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ de surface de la couche bipolaire possède un moment électrique dipolaire $d\mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}\, dS = \tau\, d\mathbf{S}$.

Le potentiel produit par la couche bipolaire au point d'observation de rayon vecteur $\mathbf{r}$ est déterminé par la formule suivante

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dS', \qquad (I.23)$$

où $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}')$ est la densité de moment électrique dipolaire en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}'$ situé sur la surface de la couche bipolaire.

Lorsque la densité de moment électrique dipolaire est constante en valeur absolue, la couche est dite homogène et la formule (I.23) prend la forme beaucoup plus simple

$$\varphi = \tau\Omega. \qquad (I.24)$$

Ici Ω est l'angle solide sous lequel du point d'observation on voit la face positive de la couche bipolaire. Si c'est la face négative qui est vue du point d'observation, on affecte le second membre de (I.24) du signe moins.

Le potentiel et l'intensité de champ électrique sur la surface de la couche bipolaire satisfont aux conditions aux limites

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau, \qquad (I.25)$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 0, \qquad (I.26)$$

où les indices 1 et 2 désignent les grandeurs prises sur les faces négative et positive de la couche.

La valeur du potentiel $\varphi_0(\mathbf{r}')$ en un point quelconque sur la surface elle-même de la couche bipolaire est liée à la densité $\tau(\mathbf{r}')$ de moment électrique dipolaire en ce point par les relations suivantes

$$\varphi_1(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') - 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \qquad (I.27)$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') + 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \qquad (I.28)$$

où $\varphi_1(\mathbf{r}')$ et $\varphi_2(\mathbf{r}')$ sont les valeurs limites que prend le potentiel lorsqu'on se rapproche de la couche bipolaire respectivement du côté de la face négative et de la face positive. Ces valeurs du potentiel entrent dans la condition à la limite (I.25).

L'énergie d'un champ électrostatique s'exprime par

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2\, dV. \qquad (I.29)$$

Si cette intégrale converge dans un espace illimité, il est commode de se servir, pour le calcul de l'énergie électrostatique (I.29), de la formule équivalente

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \qquad (I.30)$$

L'énergie électrostatique d'interaction de deux systèmes chargés avec des densités volumiques $\rho_1(\mathbf{r})$ et $\rho_2(\mathbf{r}')$ est calculée au moyen de la formule

$$U = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\,\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV\, dV'. \qquad (I.31)$$

L'énergie potentielle d'un système de charges réparties avec une densité volumique $\rho(\mathbf{r})$ dans un champ électrique extérieur de potentiel $\varphi(\mathbf{r})$ est donnée par la relation

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\, dV. \qquad (I.32)$$

Si le potentiel $\varphi(\mathbf{r})$ du champ électrique extérieur ne subit, sur l'étendue du système chargé, qu'une légère variation, l'expression (I.32) est remplacée par une série rapidement convergente:

$$U = Q\varphi(\mathbf{R}) - \mathbf{dE}(\mathbf{R}) + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{R})}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \ldots \qquad (I.33)$$

Ici, le potentiel et l'intensité de champ électrique, tout comme les dérivées du potentiel, sont pris au point de rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, situé à l'intérieur du système de charges considéré. Ce point intérieur sert d'origine au système de coordonnées cartésiennes dans lequel sont définies les grandeurs **d** et $D_{\alpha\beta}$.

La force **F** et le moment **N** des forces qui sont appliquées à un système de charges dans un champ électrique extérieur d'intensité **E** ont pour grandeurs

$$\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV, \tag{I.34}$$

$$\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E})\, \rho\, dV. \tag{I.35}$$

Dans le cas particulier d'un dipôle électrique de moment **d**, les relations (I.34) et (I.35) deviennent

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\ \mathrm{grad})\ \mathbf{E} = \mathrm{grad}\ (\mathbf{dE}), \tag{I.36}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \tag{I.37}$$

En utilisant le tenseur de tensions de Maxwell

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right), \tag{I.38}$$

on peut remplacer la force électrostatique volumique (I.34) par un système de forces superficielles exercées sur la surface limitant le volume V à l'intérieur duquel la charge est répartie avec une densité volumique ρ. Alors, la composante F_α de la force résultante (I.34) s'écrira sous la forme

$$F_\alpha = \int_V \rho E_\alpha\, dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta\, dS, \tag{I.39}$$

n étant le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface S qui limite le volume V. (Pour plus de détails, consulter les ouvrages [1] à [3] par exemple. Pour la théorie et les problèmes d'électrodynamique des milieux continus, se reporter aux ouvrages [4] à [6].)

§ 1. Equations de Maxwell et conditions aux limites en électrostatique

1. Calculer l'intensité **E** d'un champ électrique dont le potentiel φ est égal à : a) **a** (**b** × **r**) ; b) (**a** × **r**) (**k** × **r**) ; c) (**ar**) cos **kr** ; d) **dr**/r^3 ; e) $f(r)\, F(r)$; f) $F(f(\mathbf{ar}))$. Ici, les vecteurs **a**, **b**, **k** et **d** sont indépendants des coordonnées et du temps alors que f et F sont des fonctions dérivables arbitraires de leur argument.

2. Peut-on produire dans l'espace un champ électrostatique d'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, où **a** est un vecteur constant ?

3. Peut-on assurer à l'extérieur d'une cavité une distribution de charges telle que l'intensité **E** du champ électrostatique à l'intérieur de la cavité soit de la forme: a) $\mathbf{E}_0$: b) $(\mathbf{br})\,\mathbf{a}$; c) $(\mathbf{ab})\,\mathbf{r}$; d) $(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{r}))$; e) $(\mathbf{ar})(\mathbf{k}\times\mathbf{r})$; f) $(\mathbf{r}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r}))$; g) $\mathbf{a}\,(\mathbf{br})\cos\mathbf{kr}$; h) $\mathbf{E}=E_r\mathbf{1}_r+E_\theta\mathbf{1}_\theta+E_\psi\mathbf{1}_\psi$, où les composantes du vecteur **E** en coordonnées sphériques sont $E_r=\frac{(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\,R^4}{r^4}(3\cos^2\theta-1)$, $E_\theta=\frac{(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\,R^4}{r^4}\sin 2\theta$ et $E_\psi=0$ pour $r>R$; i) $\mathbf{E}=E_r\mathbf{1}_r+E_\psi\mathbf{1}_\psi+E_z\mathbf{1}_z$, où les composantes du vecteur **E** en coordonnées cylindriques sont $E_r=(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\psi$, $E_\psi=(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\left(\frac{R^2}{r^2}-1\right)\sin\psi$ et $E_z=0$ pour $r>R$? Ici, les vecteures **a**, **b**, **c**, **k** et $\mathbf{E}_0$ ne dependent pas des coordonnées.

4. Déterminer la distribution volumique ρ de la charge qui produit dans l'espace un champ électrique d'intensité **E** égale à: a) $(\mathbf{br})\,\mathbf{b}$; b) $g\mathbf{r}r$; c) $\frac{e\mathbf{r}}{r^3}\left\{1-\left[1+\frac{2r}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right)\right]\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right\}$; d) $E_r\mathbf{1}_r+E_\theta\mathbf{1}_\theta+E_\psi\mathbf{1}_\psi$, où les composantes du vecteur **E** en coordonnées sphériques sont: $E_r=2\pi\rho_0\left(r-\frac{2}{3}R\right)\cos\theta$; $E_\theta=\pi\rho_0\left(\frac{4}{3}R-r\right)\sin\theta$, $E_\psi=0$ pour $r\leqslant R$ et $E_r=\frac{2\pi}{3}\rho_0R^4\frac{\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta=\frac{\pi}{3}\rho_0R^4\frac{\sin\theta}{r^3}$, $E_\psi=0$ pour $r\geqslant R$; e) $E_r\mathbf{1}_r+E_\psi\mathbf{1}_\psi+E_z\mathbf{1}_z$, où les composantes du vecteur **E** en coordonnées cylindriques sont: $E_r=\frac{4\pi}{3}\rho_0(2r-R)\cos\psi$, $E_\psi=\frac{4\pi}{3}\rho_0(R-r)\sin\psi$, $E_z=0$ pour $r\leqslant R$ et $E_r=\frac{2\pi}{3}\rho_0R\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\psi$, $E_\psi=\frac{2\pi}{3}\rho_0R\left(\frac{R^2}{2}-1\right)\sin\psi$, $E_z=0$ pour $r\geqslant R$. Ici, les grandeurs a, g, R, ρ_0, e et le vecteur **b** ne dépendent pas des coordonnées.

5. En calculant le rotationnel et la divergence de l'intensité **E** de champ électrique s'assurer qu'en électrostatique l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'$$

satisfait aux équations de Maxwell. Ici, $\rho(\mathbf{r}')$ est la densité volumique de charge au point de rayon vecteur $\mathbf{r}'$.

6. L'intensité d'un champ électrique est uniforme à l'intérieur d'une certaine région de l'espace. Les points intérieurs de cette région, portent-ils des charges quelconques qui participent à la production de ce champ électrique?

7. Démontrer qu'en électrostatique l'intégrale $\int_a^b \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ prise entre deux points quelconques de l'espace ne dépend pas de la forme du contour à intégration.

8. Déterminer la distribution superficielle σ de charge si l'intensité $\mathbf{E}$ du champ électrique est de la forme: a) $E_x = E_y = 0$, $E_z = E_0$ pour $z > 0$ et $E_x = E_y = 0$, $E_z = -E_0$ pour $z < 0$; b) $\mathbf{E} = 0$ pour $r < R$ et $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$ pour $r > R$, r étant la distance à l'origine des coordonnées et Q et R des constantes; c) $\mathbf{E} = 0$ pour $r < R$ et $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^2$ pour $r > R$, r étant la distance à l'axe des Z et q et R des constantes.

§ 2. Théorème électrostatique de Gauss

9. Soit une région de l'espace contenant une charge uniformément répartie avec une densité volumique ρ. Calculer l'intensité $\mathbf{E}$ et le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace si cette région chargée est a) une sphère de rayon R; b) un cylindre indéfini de rayon R; c) une plaque indéfinie d'épaisseur $2L$.

10. Soit une surface portant une charge uniformément répartie avec une densité superficielle σ. Déterminer l'intensité $\mathbf{E}$ et le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace si cette surface chargée a la forme: a) d'une sphère de rayon R; b) d'une surface cylindrique indéfinie de rayon R; c) d'un plan.

11. Soit une sphère de rayon R contenant une charge à symétrie sphérique avec une densité volumique $\rho = ar^5$ où a est une constante. Quelle est la valeur du flux Φ du vecteur intensité de champ électrique à travers le cercle de rayon R dont le plan touche la sphère au point central?

12. La densité moyenne de charge du nuage électronique dans l'atome d'hydrogène est égale à $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, où a est le rayon de Bohr et r la distance au proton portant la charge e. Déterminer l'intensité $\mathbf{E}$ du champ électrique dans l'atome d'hydrogène. Etudier $\mathbf{E}$ à petite distance $r \ll a$ et à grande distance $r \gg a$ du proton.

13. L'espace entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) contient une charge à symétrie sphérique répartie avec une densité volumique $\rho = \rho(r)$, r étant la distance au centre commun des sphères. Calculer l'intensité $\mathbf{E}$ et le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

14. La densité volumique de charge d'un cylindre indéfini présente une symétrie axiale et est égale à $\rho = \rho(r)$. Déterminer l'intensité $\mathbf{E}$ et le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur du cylindre. Prendre comme zéro des potentiels φ le potentiel de la surface du cylindre.

15. Soit une plaque indéfinie chargée symétriquement par rapport à son plan médian $x = 0$. La densité volumique de charge est $\rho = \rho(|x|)$. Calculer l'intensité $\mathbf{E}$ et le potentiel φ du champ élec-

trique à l'intérieur de la plaque. Prendre comme zéro des potentiels φ le potentiel des points du plan médian.

16. Soient deux charges ponctuelles de signes contraires e_1 et e_2 ($e_1 > |e_2|$) disposées sur l'axe des X à une certaine distance l'une de l'autre. L'axe des X est dirigé de la charge positive vers la charge négative. Quel est l'angle θ_2 que fait avec l'axe des X la ligne de force partant de la charge e_1 sous l'angle θ_1 et aboutissant à la charge e_2 ? Sous quel angle θ_0 part de la charge e_1 la première ligne de force qui dans le plan XY se termine à l'infini ? Quel est l'angle θ_∞ qu'elle fait avec l'axe des X à l'infini ?

17. Soient deux fils homogènes indéfinis chargés de signes contraires et tendus dans le plan XZ parallèlement à l'axe des Z. Les densités linéiques de charges sur les fils positif et négatif sont respectivement q_1 et q_2 ($q_1 > |q_2|$). L'axe des X est dirigé du fil positif vers le fil négatif. Quel est l'angle ψ_1 que fait avec l'axe des X la ligne de force partant du fil positif et entrant dans le fil négatif sous l'angle ψ_2 ? Quel est l'angle ψ_0 que fait avec l'axe des X la première ligne de force qui part du fil positif et se termine dans le plan XY à l'infini ?

18. Soit une charge e_1 disposée sur l'axe des X au point $x_1 = l$. Déterminer la valeur de la charge e_2 qu'il faut placer en un point $x_2 = -\sqrt{3}l$ sur l'axe des X pour que le flux de l'intensité du champ électrique à travers le cercle $x = 0$, $y^2 + z^2 = l^2$ soit nul.

19. L'intensité d'un champ électrique dans l'espace est connue :

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}(1 + br)\exp(-br),$$

où e et b sont des constantes positives et r est la distance à l'origine des coordonnées. Déterminer la distribution volumique ρ de la charge qui a produit ce champ. Quelle est la valeur de la charge totale Q ?

20. Calculer l'intensité **E** et le potentiel φ du champ électrique produit par deux fils conducteurs parallèles indéfinis, uniformément chargés avec une densité linéique respectivement q et $-q$. La distance entre les fils est l. Etudier la variation de **E** et de φ à grande distance des fils. Prendre comme zéro des potentiels φ le potentiel à une distance infiniment grande des fils.

21. Soient trois plans perpendiculaires entre eux et uniformément chargés avec une densité superficielle σ. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique en tout point de l'espace.

22. Soit une cavité sphérique disposée excentriquement à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée avec une densité volumique ρ. La distance entre les centres de la sphère et de la cavité est égale à l. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique aux points de la cavité sphérique.

23. Soit une cavité cylindrique placée à l'intérieur d'un cylindre indéfini uniformément chargé avec une densité volumique ρ. La distance entre les axes parallèles du cylindre et de la cavité est l. Calculer l'intensité **E** du champ électrique à l'intérieur de la cavité.

24. Soit une plaque indéfinie d'épaisseur négligeable, uniformément chargée avec une densité superficielle σ et divisée en deux parties par une fente de largeur a. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique à grande distance $r \gg a$ de la fente, en tenant compte des termes d'ordre $1/r$.

§ 3. Application de la solution générale de l'équation de Poisson

25. Soit un disque d'épaisseur négligeable de rayon R, uniformément chargé avec une densité superficielle σ. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique sur son axe. S'assurer qu'à grande distance du disque le potentiel trouvé coïncide avec le potentiel coulombien alors qu'au passage à travers la surface du disque l'intensité du champ électrique satisfait à la condition à la limite nécessaire $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

26. Soit une sphère de rayon R contenant une charge uniformément répartie avec une densité ρ à l'intérieur du volume qu'elle limite. Son plan équatorial extérieur indéfini porte une charge répartie avec une densité superficielle σ. Calculer l'intensité **E** du champ électrique sur l'axe de symétrie de la sphère qui est perpendiculaire au plan équatorial extérieur uniformément chargé.

27. L'axe des X porte, entre les points $x_1 = -l$ et $x_2 = l$, une charge uniformément répartie avec une densité linéique q. Calculer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

28. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur $2h$ contenant une charge uniformément répartie en volume avec une densité ρ. Déterminer le potentiel φ du champ électrique sur l'axe de symétrie à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. S'assurer qu'à la limite, quand $R \to 0$ et $\pi\rho R^2 \to q$, l'expression du potentiel trouvée pour les points extérieurs au cylindre se transforme en expression du potentiel du champ électrique produit par un tronçon uniformément chargé.

29. Déterminer le potentiel φ du champ électrique sur l'axe de symétrie des corps uniformément chargés suivants: a) d'un anneau d'épaisseur négligeable de rayon R chargé avec une densité linéique q; b) d'une surface cylindrique de rayon R et de hauteur $2h$ chargée avec une densité superficielle σ; c) d'une portion de plan limitée par deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) et chargée avec une densité σ; d) d'un hémisphère de rayon R chargé avec une densité superficielle σ; e) du volume limité par un hémisphère de rayon R et chargé avec une densité volumique ρ.

30. Soit un plan indéfini uniformément chargé avec une densité superficielle σ et présentant une bosse hémisphérique de rayon R. Déterminer le potentiel $\varphi = \varphi(z)$ du champ électrique sur l'axe des Z qui coïncide avec l'axe de symétrie de la surface composée chargée. Etudier $\varphi(z)$ au voisinage du point $z = 0$ de courbure de l'hémisphère ($|z| \ll R$) ainsi qu'à grande distance ($|z| \gg R$) de l'hémisphère. Prendre comme zéro des potentiels φ le potentiel au point de courbure de l'hémisphère : $\varphi(0) = 0$.

31. Soit un hémisphère de rayon R contenant à l'intérieur du volume qu'il limite une charge répartie avec une densité volumique $\rho = \rho_0 e^{ar}$, où ρ_0 et a sont des constantes et r est la distance au centre de courbure de l'hémisphère. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique au centre de courbure de l'hémisphère.

32. Soit une sphère de rayon R contenant à l'intérieur du volume qu'elle limite une charge répartie avec une densité $\rho = \rho_0 \cos\theta$, où θ est l'angle polaire d'un système de coordonnées sphériques. En se servant du développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques, déterminer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

33. Soit un anneau d'épaisseur négligeable et de rayon R, uniformément chargé avec une densité linéique q. En utilisant le développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques, déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace. S'assurer qu'aux points sur l'axe de l'anneau le potentiel trouvé coïncide avec l'expression obtenue dans le problème 29 a).

34. Soit un hémisphère de rayon R qui porte sur sa surface une charge uniformément répartie Q. En se servant du développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques, déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace. S'assurer qu'aux points sur l'axe de symétrie de l'hémisphère le potentiel trouvé coïncide avec l'expression obtenue dans le problème 29 d).

35. Soit un disque d'épaisseur négligeable et de rayon R portant une charge uniformément répartie Q. En utilisant le développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques, calculer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique à l'extérieur du disque pour $r > R$, r étant la distance au centre du disque. Montrer qu'aux points sur l'axe du disque le potentiel trouvé coïncide avec l'expression obtenue dans le problème 25.

36. En se servant du développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques, calculer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur d'une région sphérique de rayon R dont l'une des moitiés est uniformément chargée avec une densité volumique ρ.

§ 4. Force et énergie en électrostatique

37. Soit une sphère de rayon R, portant une charge Q répartie uniformément sur sa surface. Calculer la valeur absolue de la force électrostatique **F** qui cherche à séparer la sphère en deux parties égales.

38. Soit une sphère de rayon R contenant une charge uniformément répartie avec une densité ρ à l'intérieur du volume qu'elle limite. En se servant du tenseur de tensions de Maxwell, calculer la force **F** qui tend à sectionner la sphère en deux parties égales. Justifier le résultat obtenu par un calcul indépendant en se servant de la formule $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV$, **E** étant l'intensité du champ électrique produit par la sphère.

39. Soit un cylindre indéfini de rayon R, uniformément chargé avec une densité volumique ρ. En se servant du tenseur de tensions de Maxwell, calculer la force **F** qui tend à séparer le cylindre en deux parties égales. Ici **F** est la force agissant sur l'unité de longueur de l'une des parties du cylindre.

40. Déterminer l'énergie W du champ électrostatique produit par une sphère de rayon R à l'intérieur de laquelle est uniformément répartie une charge Q.

41. Déterminer l'énergie W du champ électrostatique produit par une sphère de rayon R, uniformément chargée avec une densité superficielle σ.

42. Une sphère de rayon R_1 contenant une charge Q uniformément répartie est placée excentriquement à l'intérieur d'une autre sphère de rayon R_2 uniformément chargée avec une densité volumique ρ. La charge de la grande sphère ne pénètre pas dans la petite sphère. La distance entre les centres des sphères est l. En supposant que les charges des deux sphères soient de même nom, déterminer la force **F** avec laquelle la petite sphère est poussée hors de la grande sphère. Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique U d'interaction des sphères si le potentiel du champ électrique de chaque sphère chargée est nul à l'infini?

43. Soit un cylindre indéfini de rayon R_1 uniformément chargé avec une densité volumique ρ_1 et placé à l'intérieur d'un autre cylindre de rayon R_2 uniformément chargé avec une densité volumique ρ_2. La charge du cylindre extérieur ne pénètre pas dans le cylindre intérieur. La distance entre les axes parallèles des cylindres est l. Quelle est la force **F** qui s'applique à l'unité de longueur du cylindre intérieur? Déterminer l'énergie électrostatique $U = \int \rho_1 \varphi_2\, dV$ d'interaction des cylindres par unité de leur longueur. Ici φ_2 est le potentiel dû aux charges du cylindre extérieur. Pour que le résultat soit univoque, poser que le potentiel produit par les charges de chaque cylindre homogène plein est nul sur sa surface.

44. La densité moyenne de charge du nuage électronique dans l'atome d'hydrogène se décrit par la fonction $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, où a est le rayon de Bohr et r la distance au proton portant la charge e. Tenant compte des contributions du proton et du nuage électronique, donner l'expression pour la distribution des potentiels φ du champ électrique à l'intérieur de l'atome. Etudier la variation de φ à petites ($r \ll a$) et à grandes ($r \gg a$) distances du proton. Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique U d'interaction du proton avec le nuage électronique? Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique propre W du nuage électronique?

45. Soit une partie de sphère de rayon R, uniformément chargée avec une densité superficielle σ et vue du centre de courbure sous un angle solide $\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta_0)$. Une charge ponctuelle e est placée sur l'axe de symétrie (l'axe de révolution) à la même distance du centre de courbure et de la surface chargée. Quelle est la valeur de l'énergie électrostatique U d'interaction de la charge e avec la surface chargée?

46. Calculer la force **F** qui s'applique à une charge e placée au sommet d'un cône de hauteur h et de rayon R à la base si ce cône est uniformément chargé en volume avec une densité ρ.

47. Soit une surface conique de hauteur quelconque et de rayon R à la base, uniformément chargée avec une densité superficielle σ. Déterminer le travail U à fournir pour amener une charge e de l'infini au sommet de cette surface conique.

48. Soit un secteur sphérique formé par l'intersection d'une sphère de rayon R par une surface conique dont le sommet est au centre de la sphère. Ce secteur contient une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'il limite. Calculer le travail U qu'il faut fournir pour amener une charge e de l'infini au centre de la sphère. La valeur trouvée de U sera-t-elle différente si la charge Q est répartie uniformément dans tout le volume de la sphère?

49. En coordonnées sphériques, la densité moyenne de charge du nuage électronique d'un atome d'hydrogène excité se décrit par la fonction

$$\rho = -\frac{er^4}{3^8 \pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2\theta \cos^2\theta,$$

où a est le rayon de Bohr et r la distance au proton portant la charge e. Déterminer l'énergie électrostatique U d'interaction du proton avec le nuage électronique.

§ 5. Equations de Laplace et de Poisson avec conditions supplémentaires

50. Soit un plan XY portant une charge de densité superficielle périodique $\sigma = \sigma_0 \cos (ax + by)$. Déterminer le potentiel φ du champ électrique dans un espace indéfini.

51. Les densités superficielles de charges des plans cartésiens XY, XZ et YZ sont respectivement de la forme : $\sigma = \sigma_0 \sin a_1x \sin b_1y$, $\sigma = \sigma_0 \sin a_2x \sin b_2z$, $\sigma = \sigma_0 \sin a_3y \sin b_3z$, où les constantes satisfont à la condition $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \lambda$. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

52. Soit un espace contenant une charge électrique répartie avec une densité volumique périodique $\rho = \rho_0 \sin l_1x \sin l_2y \sin l_3z$. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique en tout point de l'espace.

53. La densité volumique de charge d'un demi-espace $z \leqslant 0$ présente une structure périodique $\rho = \rho_0 \cos \mathbf{kr}$, où le vecteur constant **k** fait avec l'axe des Z un angle non nul. Calculer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

54. La densité volumique de charge d'une plaque indéfinie d'épaisseur $2a$ présente une structure périodique $\rho = \rho_0 \sin l_1x \sin l_2y \sin l_3z$, où $|z| \leqslant a$. Déterminer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque.

55. En coordonnées sphériques, la densité volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de rayon R est symétrique par rapport à l'axe des Z et s'exprime par $\rho = \rho_0 \cos \theta$, où θ est l'angle polaire, l'origine des coordonnées étant au centre de la sphère. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique en tout point de l'espace.

56. Soit un cylindre indéfini de rayon R uniformément chargé sur toute sa longueur. La densité volumique de charge s'exprime par $\rho = \rho_0 \cos \psi$, où ψ est l'angle polaire, et l'axe des Z du système de coordonnées cylindriques coïncide avec l'axe du cylindre. Evaluer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

57. Soit une charge répartie sur la surface d'une sphère de rayon R avec une densité superficielle $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, θ étant l'angle polaire d'un système de coordonnées sphériques dont l'origine est au centre de la sphère. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

58. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R uniformément chargée avec une densité superficielle $\sigma = \sigma_0 \cos \psi$, ψ étant l'angle polaire d'un système de coordonnées cylindriques dont l'axe des Z est dirigé le long de l'axe de symétrie de la surface. A l'aide d'un champ électrique extérieur, transversal et uniforme, d'intensité $\mathbf{E}_0$, la surface cylindrique est maintenue au potentiel nul. Evaluer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique résultant à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique et calculer la valeur de $\mathbf{E}_0$.

59. Soit une sphère de rayon R ; la densité volumique de charge répartie dans le volume qu'elle limite est donnée : $\rho = \mathbf{a}r$, **a** étant

un vecteur constant et **r** le rayon vecteur ayant pour origine le centre de la sphère. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

60. La densité volumique d'une charge se décrit en coordonnées sphériques par la fonction

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \qquad \text{pour } r \geqslant R,$$

où ρ_0 et R sont des constantes et $P_n(\cos\theta)$ est un polynôme de Legendre de degré $n > 1$. Evaluer le potentiel φ du champ électrique dans un espace illimité.

61. La densité volumique d'une charge en coordonnées cylindriques est de la forme

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \qquad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \qquad \text{pour } r \geqslant R,$$

où ρ_0 et R sont des constantes et n est un entier positif supérieur à l'unité. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

62. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R dont le potentiel φ_s est donné: $\varphi_s = \varphi_0 \cos n\psi$, où φ_0 est une constante, n un nombre entier, ψ l'angle polaire, et l'axe des Z coïncide avec l'axe de cette surface cylindrique. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace si à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique les charges sont absentes. Déterminer la distribution superficielle σ de charge sur la surface cylindrique.

63. Le potentiel φ_s d'une surface sphérique de rayon R est donné: $\varphi_s = \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)]$, où $Y_{lm}(\theta, \psi)$ est une fonction sphérique et θ et ψ sont les angles polaire et azimutal d'un système de coordonnées sphériques ayant pour origine le centre de la sphère. Evaluer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace en supposant qu'à l'intérieur et à l'extérieur de la surface sphérique les charges sont absentes. Déterminer la distribution superficielle σ de charge sur la surface sphérique.

64. Déterminer le potentiel φ du champ électrique dans le domaine $0 \leqslant x$ limité par trois plans $x = 0$, $y = 0$ et $y = b$. On suppose que le plan $x = 0$ est porté à un potentiel uniforme φ_0 et les deux autres plans sont maintenus au potentiel nul. A l'intérieur du domaine considéré les charges sont absentes.

65. Déterminer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur d'une boîte infiniment longue de section rectangulaire ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$) pour les conditions aux limites suivantes: le potentiel

de deux faces $x = 0$ et $y = b$ est uniforme et égal à φ_0 alors que le potentiel de deux autres faces de la boîte est nul. A l'intérieur de la boîte les charges sont absentes.

66. Déterminer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur d'un hémisphère de rayon R si le potentiel de sa surface a une valeur constante φ_0 et la base de l'hémisphère est maintenue au potentiel nul. A l'intérieur de l'hémisphère les charges sont absentes.

67. Soit un plan indéfini présentant une bosse hémisphérique de rayon R. Le potentiel de l'hémisphère est uniforme et égal à φ_0, alors que le plan est maintenu au potentiel nul. Déterminer le potentiel φ du champ électrique dans le demi-espace au-dessus du plan à bosse, en supposant que dans ce demi-espace les charges sont absentes.

68. Soit une surface sphérique de rayon R dont les deux moitiés sont portées à des potentiels constants respectivement φ_a et φ_b. Evaluer le potentiel φ du champ électrique à l'extérieur de la sphère où les charges sont absentes.

69. Soit un plan divisé par une circonférence de rayon R en deux domaines: intérieur et extérieur. Le domaine intérieur est porté à un potentiel uniforme φ_0 alors que le domaine extérieur est maintenu au potentiel nul. En se servant du développement en polynômes de Legendre, déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point du demi-espace au-dessus du plan indiqué. Dans le domaine considéré, les charges sont absentes.

70. Soit une surface sphérique de rayon R formée de deux hémisphères chargés uniformément de signes contraires; les densités superficielles de charges sont σ et $-\sigma$. L'axe des Z coïncide avec l'axe de symétrie et est dirigé des charges négatives vers les charges positives. Evaluer le potentiel φ du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface sphérique.

71. Le potentiel φ_s d'une surface cylindrique indéfinie de rayon R est de la forme $\varphi_s = \varphi_a$ pour $0 < \psi < \pi$ et $\varphi_s = \varphi_b$ pour $\pi < \psi < 2\pi$, où φ_a et φ_b sont des constantes, ψ est l'angle polaire et l'axe des Z coïncide avec l'axe de la surface cylindrique. Evaluer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace dans l'hypothèse où les charges sont absentes à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique.

72. La densité superficielle de charge sur une surface cylindrique indéfinie de rayon R est de la forme $\sigma = \sigma_a$ pour $0 < \psi < \pi$ et $\sigma = \sigma_b$ pour $\pi < \psi < 2\pi$, où σ_a et σ_b sont des constantes, ψ est l'angle polaire et l'axe des Z coïncide avec l'axe de la surface cylindrique. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

73. Le potentiel d'un plan indéfini est donné de manière qu'à l'intérieur d'un cercle de rayon R il a une valeur constante φ_0 alors qu'à l'extérieur de ce cercle il est nul. Dans le demi-espace considéré,

qui confine au plan donné, les charges sont absentes. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point du demi-espace indiqué en développant la fonction cherchée φ en intégrale de Fourier-Bessel.

74. Soit un disque d'épaisseur négligeable et de rayon R uniformément chargé avec une densité superficielle σ. En utilisant le développement en intégrale de Fourier-Bessel, déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

75. Soit un disque d'épaisseur négligeable et de rayon R porté à un potentiel constant φ_0. En se servant du développement en intégrale de Fourier-Bessel, déterminer le potentiel du champ électrique en tout point de l'espace dans l'hypothèse où les charges à l'extérieur du disque sont absentes. Evaluer la distribution superficielle de charge σ sur le disque.

§ 6. Densité de charge des corps de différente configuration

76. Soit un potentiel φ d'un champ électrique ayant en coordonnées cylindriques la forme

$$\varphi = a(3R - 2r)\, r \cos\psi \quad \text{pour } r \leqslant R,$$
$$\varphi = \frac{aR^3}{r} \cos\psi \quad \text{pour } r \geqslant R,$$

où a et R sont des constantes. Déterminer la distribution volumique de la charge ρ qui a produit ce champ électrique (problème électrostatique inverse).

77. Déterminer la distribution volumique de charge qui a créé dans l'espace un champ électrique dont le potentiel φ en coordonnées sphériques est de la forme

$$\varphi = \frac{e}{2R}\left(3 + \frac{2R}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{pour } r \leqslant R,$$
$$\varphi = \frac{2e}{r} \quad \text{pour } r \geqslant R,$$

où e et R sont des constantes. Quelle est la valeur de la charge totale Q?

78. Le potentiel φ d'un champ électrique en coordonnées sphériques est de la forme $\varphi = Q/R$ pour $r \leqslant R$ et $\varphi = Q/r$ pour $r \geqslant R$, où Q et R sont des constantes. Déterminer la distribution de charge qui a produit ce champ électrique.

79. Le potentiel φ d'un champ électrique en coordonnées cylindriques est de la forme $\varphi = 0$ pour $r \leqslant R$ et $\varphi = q \ln \frac{R}{r}$ pour $r \geqslant R$, où q et R sont des constantes. Déterminer la distribution de charge qui a produit ce champ électrique.

80. En utilisant les propriétés de la fonction delta, déterminer la distribution volumique de charge ρ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques dans les cas où l'espace contient des systèmes uniformément chargés suivants : a) une surface sphérique de rayon R chargée avec une densité superficielle σ (le centre de la sphère est confondu avec l'origine des coordonnées); b) un anneau d'épaisseur négligeable et de rayon R chargé avec une densité linéique q (l'anneau est placé dans le plan XY et son centre se confond avec l'origine des coordonnées); c) un fil indéfini confondu avec l'axe des Z et chargé avec une densité linéique q; d) un plan XY chargé avec une densité superficielle σ; e) une surface cylindrique indéfinie de rayon R chargée avec une densité superficielle σ (son axe de symétrie est confondu avec l'axe des Z).

81. En utilisant les propriétés de la fonction delta ainsi que celles de la fonction

$$\eta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha > 0, \\ 0 & \text{pour } \alpha < 0, \end{cases}$$

déterminer la distribution volumique de charge ρ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques dans les cas où l'espace contient des systèmes uniformément chargés suivants: a) un hémisphère de rayon R chargé avec une densité superficielle σ (l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de courbure et l'axe des Z est dirigé vers la concavité de l'hémisphère); b) un demi-cercle de rayon R situé dans les premier et deuxième quadrants du plan XY et chargé avec une densité linéique q (le centre de courbure du demi-cercle coïncide avec l'origine des coordonnées et son diamètre est confondu avec l'axe des X); c) une barre d'épaisseur négligeable de longueur l située sur la partie positive de l'axe des Z et chargée avec une densité linéique q (l'une des extrémités de la barre est placée à l'origine des coordonnées); d) un disque d'épaisseur négligeable et de rayon R situé dans le plan XY et chargé avec une densité superficielle σ (le centre du disque coïncide avec l'origine des coordonnées); e) une surface cylindrique de rayon R et de hauteur h chargée avec une densité superficielle σ (la base de la surface cylindrique est située sur le plan XY et son axe de symétrie est confondu avec l'axe des Z).

82. Soit une ellipse de demi-axes a et b, située dans le plan XY et chargée avec une densité linéique q. Le centre de l'ellipse coïncide avec l'origine des coordonnées et son demi-grand axe est confondu avec l'axe des X. Déterminer la distribution volumique de charge ρ en coordonnées cartésiennes.

83. Soit une surface de révolution elliptique de demi-axes a et b, uniformément chargée avec une densité superficielle σ. Le centre de la surface elliptique coïncide avec l'origine des coordonnées cartésiennes et le demi-axe b est confondu avec l'axe des Z qui est l'axe

de symétrie axiale. Déterminer la distribution volumique de charge ρ en coordonnées cartésiennes.

84. La distribution volumique de charge dans l'espace se décrit en coordonnées sphériques à l'aide de la fonction delta par la relation $\rho = \frac{a}{r^2}\delta(1 - \cos^2\theta)$ où a est une constante. Déterminer la forme du corps chargé et le caractère de distribution de charge sur ce corps.

85. Déterminer la forme du corps chargé et le caractère de distribution de charge sur ce corps si la densité volumique de charge dans l'espace se décrit en coordonnées cartésiennes par les fonctions suivantes: a) $\rho = 2\,|a|\,\sigma\delta(x^2 - a^2)$ où a et σ sont des constantes; b) $\rho = 2\,|a|\,q\delta(x^2 - a^2)\,\delta(z)$ où a et q sont des constantes; c) $\rho = 2q\sqrt{a^2 + b^2}\delta(x^2 - 2ax - 2by + y^2)\,\delta(z)$ où a, b et q sont des constantes; d) $\rho = \frac{Q}{\pi ab}\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\delta(z)$ où a, b et Q sont des constantes positives; e) $\rho = \frac{Q}{2\pi abc}\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$, où a, b, c et Q sont des constantes positives.

§ 7. Moment électrique dipolaire

86. Démontrer que le moment électrique dipolaire d'un système de charges ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées si la charge totale du système est nulle.

87. Soit une surface conique de génératrice l et de rayon R à la base, uniformément chargée avec une densité superficielle σ. Le sommet de la surface conique est placé à l'origine des coordonnées et sa hauteur est confondue avec la partie positive de l'axe des Z. Déterminer la distribution volumique de charge ρ dans l'espace en coordonnées sphériques. En se servant de l'expression obtenue, calculer le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$.

88. Soit une barre d'épaisseur négligeable de longueur l uniformément chargée avec une densité linéique q et placée dans le premier quadrant du plan XY, en faisant l'angle ψ_0 avec l'axe des X. L'une des extrémités de la barre coïncide avec l'origine des coordonnées. Donner l'expression de la distribution volumique de charge ρ dans l'espace en coordonnées cylindriques. A partir de l'expression trouvée, calculer le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$.

89. Exprimer par la fonction delta la distribution volumique de charge ρ d'un dipôle ponctuel de moment électrique $\mathbf{d}$ placé en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$.

90. En se servant du passage à la limite

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} el = \mathbf{d}$$

et de l'expression pour le potentiel des charges e et $-e$ placées en des points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$ et $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_0$, déterminer le potentiel φ du champ électrique dû à un dipôle ponctuel de moment électrique **d**.

91. S'assurer que l'intensité **E** du champ électrique produit par un dipôle de moment **d** placé à l'origine des coordonnées peut être représentée sous la forme

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d}\ \mathrm{grad})\ \mathrm{grad}\ 1/r.$$

92. Soient un dipôle de moment **d** placé à l'origine des coordonnées et une sphère de rayon R dont le centre est en un point de rayon vecteur **r** ($r > R$). La sphère contient une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'elle limite. Calculer l'énergie U d'interaction du dipôle avec la sphère et la force **F** qui s'applique à la sphère.

93. Soient une sphère de rayon R contenant une charge uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'elle limite avec une densité volumique $\rho = ar^2$, a étant une constante et r la distance à l'origine des coordonnées située au centre de la sphère, et un dipôle de moment **d** placé en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$. Déterminer la force **F** et le moment **N** des forces agissant sur le dipôle dans deux cas: a) $r_0 > R$; b) $r_0 < R$.

94. Soient deux dipôles dont l'un, de moment $\mathbf{d}_1$, est placé à l'origine des coordonnées et l'autre, de moment $\mathbf{d}_2$, en un point de rayon vecteur **r**. Déterminer la force **F** et le moment **N** des forces qui sont appliquées à chacun des dipôles.

95. La distribution volumique de charge dans l'espace est de la forme $\rho(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\nabla)\,\delta(\mathbf{r})$, où **a** est un vecteur constant. En se servant de la solution générale de l'équation de Poisson, déterminer le potentiel du champ électrique en tout point de l'espace. A partir de la relation obtenue pour le potentiel, donner l'interprétation physique du vecteur **a**.

96. Soit un moment électrique dipolaire $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ par unité de volume donné en tout point de l'espace. La fonction vectorielle $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ décroît à l'infini plus vite que $1/r^2$. Démontrer que la distribution donnée de densité de moment dipolaire **P** produit en tout point de l'espace le même champ électrique que celui créé par une charge répartie avec une densité volumique $\rho(\mathbf{r}) = -\mathrm{div}\,\mathbf{P}(\mathbf{r})$.

§ 8. Tenseur de moment électrique quadrupolaire

97. Démontrer que le tenseur de moment électrique quadrupolaire d'un système de charges ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées si la charge totale et le moment électrique dipolaire de ce système sont nuls.

98. En coordonnées sphériques, la densité moyenne de charge du nuage électronique d'un atome d'hydrogène excité se décrit par la fonction

$$\rho = -\frac{1}{4\cdot 3^8}\frac{er^4}{\pi a^7}e^{-\frac{2r}{3a}}\sin^4\theta,$$

a étant le rayon de Bohr et r la distance au proton portant une charge e. Déterminer le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire de l'atome. Quelle est la valeur du moment électrique dipolaire **d**?

99. Soit un hémisphère de rayon R ; son centre de courbure coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe des Z est dirigé suivant l'axe de symétrie vers la concavité. Déterminer les composantes du moment dipolaire d_α et du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire si la charge Q est uniformément répartie a) à l'intérieur du volume limité par l'hémisphère ; b) sur la surface de l'hémisphère ; c) sur la surface et la base de l'hémisphère.

100. Soit un cercle constitué par deux demi-cercles uniformément chargés de signes contraires. Déterminer les composantes du tenseur de moment quadrupolaire.

101. Soit un hémisphère de rayon R portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Cet hémisphère s'élève au-dessus du plan XY et sa base est tangente aux axes des X et Y en des points de coordonnées positives. Déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire.

102. Soit un demi-cercle uniformément chargé, portant une charge Q et situé dans le premier quadrant du plan XY. L'une des extrémités du demi-cercle est placée à l'origine des coordonnées et l'autre en un point $x = 2R$ sur l'axe des X. Déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire.

103. Soit une ellipse de demi-axes a et b dont le centre coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes. Le demi-grand axe a coïncide avec l'axe des X et le demi-petit axe b avec l'axe des Y. La densité linéique de charge q de l'ellipse est uniforme. En supposant l'excentricité ε de l'ellipse petite ($\varepsilon \ll 1$), déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire à des termes d'ordre ε^2 près.

104. Soit une surface de révolution elliptique de demi-axes a et b, uniformément chargée avec une densité superficielle ρ, dont le centre coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes. Le demi-axe b est confondu avec l'axe des Z qui est l'axe de symétrie. L'excentricité de l'ellipse de demi-axes a et b est beaucoup plus petite que l'unité ($\varepsilon \ll 1$). En gardant les termes à la plus petite puissance du paramètre ε, déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire.

105. Soit un carré de côté $2a$ aux sommets duquel se situent des charges ponctuelles e dont le signe s'inverse lorsqu'on passe d'un

sommet au sommet voisin. En se servant de la formule générale $D_{\alpha\beta} = \sum_m e_m (3x_{m\alpha}x_{m\beta} - r_m^2 \delta_{\alpha\beta})$, déterminer les tenseurs de moment quadrupolaire dans les systèmes de coordonnées cartésiennes XYZ et $X'Y'Z'$ tournées autour de l'axe commun des $Z \equiv Z'$ (fig. 1). Donner la matrice de rotation $a_{\alpha\beta}$ et vérifier par un calcul direct que les tenseurs trouvés $D_{\alpha\beta}$ et $D'_{\alpha\beta}$ satisfont à la relation $D'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\sigma}a_{\beta\gamma}D_{\sigma\gamma}$, où le signe $'$ indique les composantes du tenseur de moment quadrupolaire dans le système de coordonnées affecté de prime.

106. Soient deux dipôles ponctuels identiques placés sur l'axe des X à la même distance a de l'origine des coordonnées. Au point de coordonnée négative, le moment dipolaire **d** est antiparallèle à

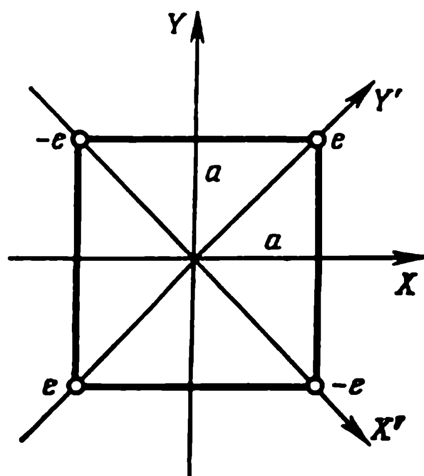


Fig. 1

l'axe des X alors que l'autre moment dipolaire forme dans le plan XY l'angle α avec l'axe des X. Déterminer les composantes du moment dipolaire d_α et du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire du système considéré.

107. Déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire d'un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b uniformément chargé. Le centre de l'ellipsoïde de révolution coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes et son demi-axe b est confondu avec l'axe des Z qui est l'axe de symétrie axiale. La charge totale est égale à Q. Le tenseur de moment quadrupolaire, quelle forme prendra-t-il si l'ellipsoïde considéré est tourné autour de l'axe des Y d'un angle α dans le sens des aiguilles d'une montre ?

108. L'origine d'un système de coordonnées cartésiennes coïncide avec le centre d'un ellipsoïde de demi-axes a, b et c uniformément chargé. Le demi-axe c coïncide avec l'axe des Z alors que le demi-axe a fait un angle α avec l'axe des X. La charge totale de l'ellip-

soïde est égale à Q. Déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire.

109. Le centre d'une circonférence de rayon R coïncide avec l'origine des coordonnées. L'un de ses diamètres est confondu avec l'axe des X et l'autre, perpendiculaire au premier, fait un angle α avec l'axe des Y et se situe dans les premier et troisième quadrants du plan YZ. La densité linéique de charge sur la circonférence est uniforme et la charge totale est égale à Q. Déterminer les composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire dans le système de coordonnées cartésiennes XYZ.

110. Soit un système de charges caractérisé par le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique en coordonnées cartésiennes.

111. Déterminer le potentiel φ de champ électrique dans le cas où la distribution volumique de charge dans l'espace est de la forme

$$\rho(\mathbf{r}) = a_{\alpha\beta}\left(3\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \delta_{\alpha\beta}\nabla^2\right)\delta(\mathbf{r}),$$

$a_{\alpha\beta}$ étant un tenseur constant arbitraire. Etudier l'expression obtenue pour le potentiel et en déduire le sens physique du tenseur $a_{\alpha\beta}$.

112. Exprimer les composantes du moment dipolaire d_α et du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment quadrupolaire d'un système de charges par les composantes correspondantes des moments multipolaires

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \psi)\, dV,$$

ρ étant la densité volumique de charge et $Y_{lm}(\theta, \psi)$ une fonction sphérique.

113. Le potentiel $\varphi(\mathbf{r})$ d'un champ électrique extérieur ne varie que très peu sur l'étendue d'un système chargé. En tenant compte de la charge totale ainsi que des moments électriques dipolaire et quadrupolaire, déterminer l'énergie potentielle U du système chargé dans le champ électrique extérieur donné pour le cas où le système chargé indiqué plus haut représente : a) trois charges e, e et $-2e$ placées sur l'axe des X à égale distance a l'une de l'autre (la charge négative se trouvant au point $x = 0$ entre les charges positives) ; b) trois charges e, e et $-e$ placées dans le plan XY aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a dont le centre coïncide avec l'origine du système de coordonnées cartésiennes (la charge négative est placée sur la partie positive de l'axe des X) ; c) un quadrupôle représenté sur la fig. 2 ; d) un ellipsoïde de demi-axes a, b et c, uniformément chargé, dont le centre est situé à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes (la charge totale de l'ellipsoïde est Q).

114. Soit un disque d'épaisseur négligeable de forme elliptique de demi-axes a et b uniformément chargé et placé dans un champ

électrique extérieur dont le potentiel φ (**r**) ne varie que peu sur l'étendue du disque. La charge totale du disque est égale à Q et ses demi-axes a et b sont confondus respectivement avec les axes des X et Y d'un système de coordonnées cartésiennes. Déterminer l'énergie électrostatique U du disque dans le champ électrique extérieur en tenant compte du moment électrique quadrupolaire. Quelle est la valeur de la force **F** exercée sur le disque?

115. L'intensité **E** = **E** (**r**) d'un champ électrique extérieur varie peu sur l'étendue d'une région de l'espace où est placée une charge de densité volumique ρ = ρ (**r**). En développant **E** (**r**) en série de Taylor par rapport au point intérieur du domaine chargé et en

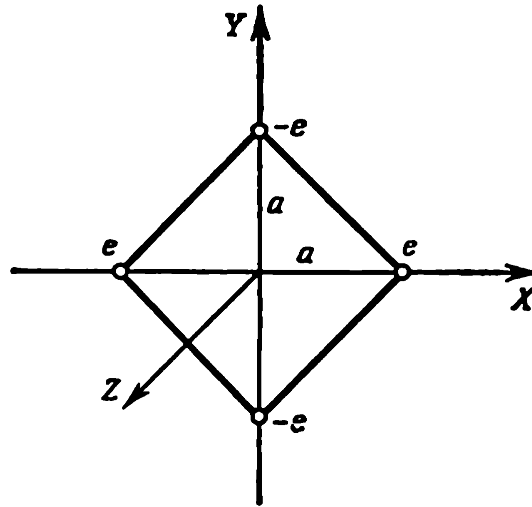


Fig. 2

négligeant les dérivées d'ordre supérieur (à partir de la troisième), exprimer la force $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV$, qui s'applique au système chargé, par sa charge totale Q, le moment électrique dipolaire **d** et le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire.

116. Une charge de densité volumique ρ = ρ (**r**) est concentrée dans un domaine limité de l'espace. L'intensité **E** = **E** (**r**) d'un champ électrique extérieur varie peu à l'intérieur de ce domaine. En développant **E** (**r**) en série de Taylor et en négligeant les dérivées d'ordre supérieur, exprimer le moment $\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \rho\, dV$ des forces qui s'appliquent au système chargé par son moment électrique dipolaire **d** et le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire.

117. En coordonnées sphériques, la densité moyenne de charge du nuage électronique d'un atome d'hydrogène excité est donnée par l'expression

$$\rho = -\frac{2}{3^8} \frac{er^2}{\pi a^5} \left(6 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3a}} \cos^2 \theta,$$

où a est le rayon de Bohr et r la distance au proton portant la charge e. L'intensité **E** d'un champ électrique extérieur, en tant que fonction des coordonnées, varie peu dans l'espace. Déterminer la force **F** et le moment **N** des forces qui s'appliquent à l'atome, compte tenu de son moment électrique quadrupolaire.

118. Soit une barre d'épaisseur négligeable et de longueur $2l$, uniformément chargée avec une densité linéique q et placée dans le plan XY, en faisant un angle ψ_0 avec l'axe des X. Le milieu de la barre coïncide avec l'origine des coordonnées. Une charge ponctuelle e est placée sur l'axe des X à grande distance de la barre. Déterminer le moment **N** des forces qui s'appliquent à la barre par rapport à son milieu.

§ 9. Champ à grande distance du système chargé

119. L'origine d'un système de coordonnées cartésiennes coïncide avec le centre d'un corps uniformément chargé et l'axe des Z est dirigé suivant l'axe de symétrie d'ordre supérieur. Déterminer le terme quadrupolaire dans le développement du potentiel φ du champ électrique à grande distance pour les cas où le corps chargé considéré présente a) un anneau d'épaisseur négligeable et de rayon R chargé avec une densité linéique q; b) un cylindre de rayon R et de hauteur $2h$ chargé avec une densité volumique ρ; c) une surface cylindrique de rayon R et de hauteur $2h$ chargée avec une densité superficielle σ; d) un tronçon de longueur $2l$ chargé avec une densité linéique q.

120. Déterminer, au terme quadrupolaire près, le potentiel φ du champ électrique produit à grande distance par des systèmes de charges suivants: a) trois charges e, e et $-2e$ situées sur l'axe des Z à la même distance a l'une de l'autre (la charge négative est placée au point $z = 0$ entre les charges positives); b) trois charges e, e et $-e$ placées dans le plan XY aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a et de centre à l'origine des coordonnées cartésiennes (la charge négative se situe sur la partie positive de l'axe des Y); c) un quadrupôle représenté sur la fig. 3.

121. Calculer le potentiel φ du champ électrique produit à grande distance par deux dipôles ponctuels antiparallèles placés sur l'axe des X à la même distance a de l'origine des coordonnées. Au point de coordonnée positive $x = a$, le moment dipolaire est parallèle à l'axe des Z et est égal à **d**. Effectuer le calcul par deux procédés: a) calculer d'abord le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire du système et puis, déterminer son champ électrique; b) déterminer le champ électrique du système en tant que superposition des champs dus aux dipôles distincts.

122. On considère deux barres identiques de longueur l, uniformément chargées, situées dans le plan XY et formant un angle ψ_0.

Le sommet de l'angle coïncide avec l'origine des coordonnées et l'un des côtés est dirigé le long de l'axe des X. Quelle doit être la valeur de l'angle ψ_0 pour qu'en un point x_0 sur l'axe des X, à grande distance des barres chargées, le potentiel dipolaire soit égal au potentiel quadrupolaire ?

123. Soit un cercle de rayon R formé de deux demi-cercles uniformément chargés de signes contraires et situés dans le premier quadrant du plan XY. Le demi-cercle portant la charge négative $-Q$ est tangent aux axes X et Y alors que le diamètre qui sépare les

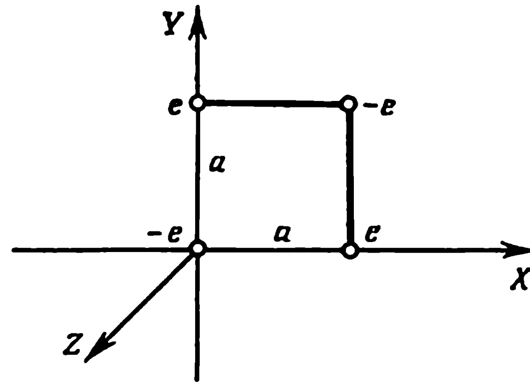


Fig. 3

charges de signes contraires est parallèle à l'axe des X. Déterminer, au terme quadrupolaire près, le potentiel φ du champ électrique à grande distance.

124. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur $2h$ contenant une charge Q uniformément répartie à l'intérieur de son volume. L'axe des Z coïncide avec la génératrice du cylindre et l'axe des X est dirigé suivant le diamètre de sa base. Déterminer, au terme quadrupolaire près, le potentiel φ du champ électrique à grande distance du cylindre.

125. En tenant compte de la charge totale et du tenseur de moment électrique quadrupolaire, déterminer le potentiel φ du champ électrique à grande distance du système chargé si la distribution volumique de charge s'exprime par la fonction des coordonnées cartésiennes suivante :

a) $\rho = \frac{Q}{\pi ab} \delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \delta(z)$ où a, b et Q sont des constantes ;

b) $\rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b} \delta\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$ où a, b et Q sont des constantes ;

c) $\rho = \frac{Q}{2\pi abc} \delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ où a, b, c et Q sont des constantes.

126. Soit un hémisphère de rayon R uniformément chargé avec une densité superficielle σ. En se servant du développement de la fonction $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \psi)$, représenter le potentiel φ du champ électrique à l'extérieur de l'hémisphère sous forme de développement en moments multipolaires

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \psi)\, dV.$$

127. Soit un cercle de rayon R formé de deux demi-cercles uniformément chargés de signes contraires Q et $-Q$. L'origine des coordonnées coïncide avec le centre du cercle et l'axe des Y est dirigé des charges négatives vers les charges positives, alors que l'axe des X sépare ces charges entre elles. A grande distance $z \gg R$ du cercle, sur son axe, est placé un dipôle de moment $\mathbf{d}$ qui est parallèle à l'axe des Z. Déterminer la force $\mathbf{F}$ et le moment $\mathbf{N}$ des forces qui s'appliquent au dipôle.

128. Soit un ellipsoïde de demi-axes a, b et c contenant une charge Q uniformément répartie à l'intérieur de son volume. L'origine d'un système de coordonnées cartésiennes coïncide avec le centre de l'ellipsoïde alors que les demi-axes a, b et c sont confondus respectivement avec les axes des X, des Y et des Z. Un dipôle de moment $\mathbf{d}$ est placé en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ à grande distance de l'ellipsoïde. Déterminer l'énergie électrostatique U d'interaction du dipôle avec l'ellipsoïde compte tenu du terme dipolaire-quadrupolaire.

129. Soit un demi-cercle de rayon R portant une charge Q, uniformément répartie sur sa longueur. Le centre de courbure du demi-cercle coïncide avec l'origine des coordonnées et son diamètre se confond avec l'axe des X. L'axe des Y est dirigé vers le demi-cercle. En tenant compte de la charge Q ainsi que des moments dipolaire et quadrupolaire, calculer la force $\mathbf{F}$ qui s'applique à une charge e placée sur l'axe des Z à grande distance du demi-cercle.

130. Une charge e est placée en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ à grande distance d'un ellipsoïde uniformément chargé, dont les demi-axes a, b et c sont dirigés respectivement suivant les axes des X, Y et Z, d'un système de coordonnées cartésiennes. La charge totale de l'ellipsoïde est égale à Q. En tenant compte du tenseur de moment quadrupolaire, déterminer l'écart $\Delta\mathbf{F}$ à la loi de Coulomb pour la force $\mathbf{F}$ exercée sur la charge e.

131. Soient deux atomes d'hydrogène excités, situés sur l'axe des Z à une grande distance L l'un de l'autre ($L \gg a$, a étant le rayon de Bohr). En coordonnées sphériques, les densités moyennes de charges ρ_1 et ρ_2 des nuages électroniques de ces atomes sont données

respectivement par

$$\rho_1 = -\frac{1}{3^8}\frac{er_1^4}{\pi a^7}e^{-\frac{2r_1}{3a}}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{4\cdot 3^8}\frac{er_2^4}{\pi a^7}e^{-\frac{2r_2}{3a}}\sin^4\theta,$$

e étant la charge du proton et r_1 et r_2 les distances du point d'observation aux centres du premier et du deuxième atomes. Déterminer l'énergie U d'interaction quadrupôle-quadrupôle des atomes.

§ 10. Couche bipolaire

132. Soit une couche bipolaire uniforme ayant la forme d'un disque de rayon **R** situé dans le plan XY. Le centre du disque coïncide avec l'origine des coordonnées et la densité de moment dipolaire $\boldsymbol{\tau}$ est parallèle à l'axe des Z. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique sur l'axe des Z.

133. Soit une couche bipolaire uniforme ayant la forme d'un hémisphère de rayon R dont le centre de courbure est à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes et l'axe de symétrie est confondu avec l'axe des Z. Ce dernier est dirigé vers la convexité de l'hémisphère. La densité de moment dipolaire sur l'hémisphère est dirigée suivant le rayon vers l'extérieur. Calculer le potentiel φ du champ électrique sur l'axe des Z.

134. La densité de moment dipolaire d'une couche bipolaire ayant la forme d'un demi-plan ($y = 0$, $x \geqslant 0$) est égale à $\boldsymbol{\tau}$. Déterminer le potentiel φ et l'intensité **E** du champ électrique en tout point de l'espace si le vecteur constant $\boldsymbol{\tau}$ est parallèle à l'axe des Y d'un système de coordonnées cartésiennes.

135. Le plan d'une couche bipolaire uniforme présente un orifice circulaire de rayon R. L'origine d'un système de coordonnées cartésiennes coïncide avec le centre de l'orifice et l'axe des Z est parallèle à la densité de moment dipolaire $\boldsymbol{\tau}$. Déterminer la force **F** qui s'applique à une charge ponctuelle e placée sur l'axe des Z.

136. Une couche bipolaire a la forme d'un plan présentant une bosse hémisphérique. La densité de moment dipolaire $\boldsymbol{\tau}$ est en tout point de la surface composée parallèle à sa normale et est dirigée vers le demi-espace contenant la bosse. Déterminer le potentiel φ du champ électrique en tout point de l'espace.

137. Démontrer que l'intensité **E** du champ électrique d'une couche bipolaire uniforme est de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ où τ est le module du vecteur densité de moment dipolaire $\boldsymbol{\tau}$ de la couche bipolaire, $d\mathbf{l}'$ l'élément de contour fermé L sur lequel est tendue la couche bipolaire, **r** et **r′** sont les rayons vecteurs respectivement du point d'observation et du point d'emplacement de l'élément $d\mathbf{l}'$. Le sens de parcours du contour à l'intégration L est lié au sens du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ par la règle de la vis normale.

CHAPITRE II

CHAMP MAGNÉTIQUE STATIQUE

Le vecteur intensité de champ magnétique **H** dans le vide est défini par la force

$$d\mathbf{F}=\frac{J}{c}(d\mathbf{l}\times\mathbf{H}), \qquad \text{(II.1)}$$

agissant sur un élément $d\mathbf{l}$ de contour parcouru par un courant J. Dans cette expression, c est la constante électrodynamique numériquement égale à la vitesse de la lumière dans le vide, $c = 3\cdot10^{10}$ cm/s.

Un champ magnétique statique dans le vide est créé par des courants constants ou permanents. La répartition des courants dans l'espace se caractérise par la densité volumique **j** (**r**), et celle sur la surface par la densité superficielle **i** (**r**). En outre, on peut donner dans l'espace un courant filiforme ou rectiligne J qui circule à l'intérieur d'un tube très mince et très long. L'intensité de champ magnétostatique satisfait aux équations de Maxwell

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \text{(II.2)}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0. \qquad \text{(II.3)}$$

Si les courants circulent dans une région limitée, l'intensité de champ magnétostatique à grande distance r du courant-source décroît non moins lentement que comme $1/r^3$. Cette proposition constitue une condition supplémentaire aux équations de Maxwell (II.2) et (II.3) pour le calcul de **H** dans un espace illimité.

Sur une surface parcourue par un courant de densité superficielle **i**, la composante normale $H_n = \mathbf{Hn}$ et la composante tangentielle $H_\tau = \mathbf{H\tau}$ de l'intensité de champ magnétique satisfont aux relations

$$H_{2n}-H_{1n}=0, \qquad \text{(II.4)}$$

$$H_{2\tau}-H_{1\tau}=\frac{4\pi}{c}i_N, \qquad \text{(II.5)}$$

dans lesquelles $i_N = \mathbf{i}\mathbf{N}$ et les vecteurs unités **n**, **τ** et **N** forment un trièdre direct $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}$. Les indices 1 et 2 indiquent l'intensité de champ magnétique dans les première et deuxième régions situées de part et d'autre de la nappe de courant. Le vecteur **n** de la normale à cette nappe de courant est dirigé de la première région vers la deuxième. La formule (II.5) s'écrit souvent vectoriellement

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}.$$

En magnétostatique, les relations (II.4) et (II.5) expriment les conditions aux limites.

En utilisant les propriétés de la fonction delta, on peut tenir compte de la distribution superficielle de courant de densité **i** (**r**) dans la densité volumique **j** (**r**) qui sera une fonction singulière égale à l'infini aux points de la surface parcourue par le courant. Dans ce cas, les équations de Maxwell (II.2) et (II.3) faisant intervenir la fonction singulière **j** (**r**) obtenue par ce procédé peuvent être résolues sans avoir recours aux conditions aux limites (II.4) et (II.5).

Le champ magnétique créé par un courant filiforme J est déterminé à l'aide de la loi de Biot et Savart

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J\, d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{II.6}$$

où **r** et **r′** sont les rayons vecteurs du point d'observation et du point d'emplacement de l'élément de courant $J\,d\mathbf{l}'$ respectivement. Suivant le principe de superposition, le champ magnétique total est égal à la somme des champs produits par chaque élément de courant séparément :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{II.7}$$

Dans le cas où la répartition de courant présente une symétrie axiale ou une symétrie par rapport à un plan, il est commode, pour calculer l'intensité **H**, de se servir du théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique (théorème d'Ampère)

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J, \tag{II.8}$$

où J est la somme algébrique des courants traversant le contour fermé L. Dans le cas général, le courant J est représenté par un système de courants volumiques, superficiels et filiformes qui traversent une surface quelconque s'appuyant sur le contour à intégration L. Le sens positif de circulation du courant J est lié au sens de parcours du contour à intégration L par la règle de la vis normale.

Mathématiquement, il y a intérêt à passer de deux équations (II.2) et (II.3) du premier ordre à une seule équation équivalente du deuxième ordre pour le potentiel vecteur **A** qui est défini par la rela-

tion

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{II.9}$$

Le potentiel vecteur n'est pas défini de façon univoque, car l'intensité de champ magnétique ne change pas si l'on passe à un autre potentiel vecteur A′ à l'aide d'un changement d'état choisi pour zéro

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \tag{II.10}$$

où $f = f(\mathbf{r})$ est une fonction arbitraire.

Pour limiter l'arbitraire dans le choix du potentiel vecteur, on impose une condition supplémentaire dite de Lorentz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{II.11}$$

Dans ce cas, le potentiel vecteur du champ magnétique satisfait à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \tag{II.12}$$

Sur la surface de séparation de deux régions sont satisfaites les conditions aux limites

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \tag{II.13}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2. \tag{II.14}$$

La solution de l'équation (II.12) est une fonction continue en tout point de l'espace où circulent des courants volumiques et superficiels de densité finie. La condition à la limite sur un contour linéaire parcouru par un courant J s'écrit quand $r \to 0$ sous la forme $A = \boldsymbol{\tau} \left(\frac{2J}{c} \ln \frac{1}{r} + \text{const}\right)$, où r est la distance la plus courte du point d'observation au contour considéré et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent au contour qui indique le sens de circulation du courant. Si les courants sont concentrés dans une région finie, le potentiel vecteur à grande distance r du courant-source décroît comme $1/r^2$ ou plus rapidement. Ces remarques sont à utiliser conjointement avec les conditions aux limites (II.13) et (II.14) lors de la résolution de l'équation de Poisson (II.12). A partir du potentiel vecteur trouvé de cette manière on détermine l'intensité de champ magnétique par dérivation de l'équation (II.9).

D'autre part, si l'intensité de champ magnétique H est connue (par exemple, obtenue du théorème (II.8)), le potentiel vecteur A se trouve aisément de la relation (II.9) considérée comme équation différentielle par rapport à la fonction cherchée de A.

Le potentiel vecteur et l'intensité du champ magnétique des courants volumiques peuvent être exprimés par des intégrales de

volume :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \text{(II.15)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'. \qquad \text{(II.16)}$$

Si l'intégrale de volume est convergente, le potentiel vecteur (II.15) est solution générale de l'équation de Poisson (II.12), qui satisfait aux conditions aux limites sur la surface de séparation des courants et du vide. Si l'intégrale (II.15) ne converge pas ou ne se prête pas au calcul analytique, on recherche le potentiel vecteur du champ magnétique par résolution de l'équation de Poisson (II.12) en tenant compte des conditions aux limites (II.13) et (II.14).

Dans le cas d'un courant filiforme, les grandeurs **A** et **H** sont obtenues à partir des expressions (II.15) et (II.16) à l'aide du remplacement

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV' \to J\,d\mathbf{l}' \qquad \text{(II.17)}$$

qui transforme les intégrales de volume (II.15) et (II.16) en intégrales curvilignes prises sur l'axe d'un tube très mince parcouru par un courant filiforme J. L'élément d'axe $d\mathbf{l}'$ de ce tube est dirigé dans le sens de circulation du courant J. Après le passage à l'intégrale curviligne dans l'expression (II.16), on retrouve la formule (II.7). C'est pourquoi l'expression (II.16) est aussi appelée loi de Biot et Savart.

D'une manière analogue, pour les courants superficiels, il convient d'effectuer dans les intégrales (II.15) et (II.16) le remplacement $\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV' \to \mathbf{i}(\mathbf{r}')\,dS'$.

A grande distance r d'une région limitée parcourue par des courants fermés, le potentiel vecteur et l'intensité de champ magnétique prennent la forme

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \qquad \text{(II.18)}$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}, \qquad \text{(II.19)}$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est le moment magnétique des courants fermés. Dans le cas des courants volumiques, on a

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\,dV. \qquad \text{(II.20)}$$

Pour les courants filiformes fermés, la dernière expression devient

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{J\mathbf{S}}{c}, \qquad \text{(II.21)}$$

où

$$\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}. \qquad \text{(II.22)}$$

Cette intégrale est prise sur une surface arbitraire s'appuyant sur le contour du tube de courant parcouru par un courant filiforme J. Le module du vecteur $\mathbf{S}$ est égal à l'aire de la plus petite surface d'intégration. Si le contour d'un tube de courant se situe dans un plan, l'orientation du vecteur $\mathbf{S}$ est liée au sens du courant J dans le tube par la règle de la vis normale.

L'énergie d'un champ magnétique s'exprime par

$$W=\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}^2\,dV. \tag{II.23}$$

Dans le cas des courants volumiques circulant dans une région limitée de l'espace, l'énergie magnétique (II.23) des courants peut également être calculée au moyen de la formule

$$W=\frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV. \tag{II.24}$$

L'énergie magnétique d'interaction des courants de densités volumiques $\mathbf{j}_1$ et $\mathbf{j}_2$ a pour expression

$$W=\frac{1}{c^2}\int \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r})\,\mathbf{j}_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV\,dV'. \tag{II.25}$$

La force $\mathbf{F}$ subie par un courant volumique dans un champ magnétique extérieur d'intensité $\mathbf{H}$ est de la forme

$$\mathbf{F}=\frac{1}{c}\int (\mathbf{j}\times\mathbf{H})\,dV, \tag{II.26}$$

alors que l'énergie magnétique W d'interaction entre ce courant et le champ magnétique extérieur s'exprime par le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ de ce champ

$$W=\frac{1}{c}\int \mathbf{jA}\,dV. \tag{II.27}$$

Si l'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique extérieur varie peu dans l'étendue de la région de l'espace où circulent des courants fermés, l'énergie magnétique d'interaction de ces courants avec le champ extérieur s'exprime par le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ des courants fermés

$$W=\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}. \tag{II.28}$$

Dans ce cas, la force $\mathbf{F}$ et le moment $\mathbf{N}$ des forces, qui agissent sur les courants dans un champ magnétique extérieur s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{F}=(\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{H}=\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}), \tag{II.29}$$

$$\mathbf{N}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{H}. \tag{II.30}$$

Les formules (II.29) et (II.30) sont analogues aux formules correspondantes (I.36) et (I.37) en électrostatique, dans lesquelles

l'expression $-\mathbf{dE}$ représente l'énergie potentielle d'un moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ dans un champ électrique extérieur d'intensité $\mathbf{E}$. En magnétostatique, la grandeur physique $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$ n'est pas une énergie potentielle. C'est pourquoi, on introduit parfois une fonction dite potentielle $U = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$ qui permet de représenter la force subie par un moment magnétique dans un champ magnétique extérieur sous la forme ordinaire $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U$. En mécanique, la grandeur $-\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$ appliquée à une particule de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ s'appelle énergie du moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ dans le champ magnétique extérieur d'intensité $\mathbf{H}$.

La force volumique résultante (II.26) peut être remplacée par un système de forces superficielles appliquées à la surface limitant le volume V à l'intérieur duquel circulent des courants avec une densité volumique $\mathbf{j}$:

$$F_\alpha = \frac{1}{c}\int\limits_V (\mathbf{j}\times\mathbf{H})_\alpha\, dV = \oint\limits_S T_{\alpha\beta} n_\beta\, dS. \qquad \text{(II.31)}$$

Dans cette expression, $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface fermée S qui limite le volume V et $T_{\alpha\beta}$ le tenseur de tensions de Maxwell

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\delta_{\alpha\beta}\right). \qquad \text{(II.32)}$$

§ 1. Equations de Maxwell et conditions aux limites en magnétostatique

138. Est-il possible de réaliser à l'extérieur d'une cavité une distribution de courant électrique telle que l'intensité du champ magnétique à l'intérieur de la cavité soit de la forme: a) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$; b) $\mathbf{H} = b\,(z\mathbf{1}_x + x\mathbf{1}_y + y\mathbf{1}_z)$, où b est une constante; c) $\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}$, où le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ est indépendant des coordonnées et du temps, alors que le point de rayon vecteur $\mathbf{r} = 0$ se situe à l'extérieur de la cavité?

139. Est-il possible de produire dans l'espace un courant électrique constant de densité volumique indépendante du temps $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-ar}$ où a est une constante positive?

140. Déterminer la distribution volumique de courant $\mathbf{j}$ dans l'espace si l'intensité du champ magnétique $\mathbf{H}$ créée par ce courant est de la forme: a) $\mathbf{H} = f(r)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, où le vecteur $\mathbf{a}$ est indépendant des coordonnées et du temps et $f(r)$ est une fonction dérivable arbitraire; b) $\mathbf{H} = (\mathbf{ar})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{r})$, où les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont parallèles et indépendants des coordonnées et du temps; c) $\mathbf{H} = H_r\mathbf{1}_r + H_\theta\mathbf{1}_\theta + H_\psi\mathbf{1}_\psi$, où les composantes du vecteur $\mathbf{H}$ en coordonnées

sphériques ont pour expressions

$$H_r = a\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\theta, \quad H_\theta = a\left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\sin\theta,$$

$$H_\psi = 0 \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$H_r = \frac{2aR^5}{15r^3}\cos\theta, \quad H_\theta = \frac{aR^5}{15r^3}\sin\theta,$$

$$H_\psi = 0 \quad \text{pour } r \geqslant R;$$

d) $\mathbf{H} = H_r \mathbf{1}_r + H_\psi \mathbf{1}_\psi + H_z \mathbf{1}_z$, où les composantes du vecteur **H** en coordonnées cylindriques sont

$$H_r = 0, \quad H_\psi = gr, \quad H_z = b(R^2 - r^2) \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{gR^2}{r} \quad \text{pour } r \geqslant R,$$

a, b, g et R étant ici des constantes.

141. En calculant le rotationnel et la divergence de l'intensité de champ magnétique **H**, s'assurer qu'en magnétostatique l'expression

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV'$$

satisfait aux équations de Maxwell. Ici, $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ est la densité volumique de courant constant au point de rayon vecteur $\mathbf{r}'$ et c la vitesse de la lumière dans le vide.

142. Vérifier par un calcul direct que dans le cas d'un champ magnétique statique uniforme d'intensité **H** le potentiel vecteur **A** qui satisfait à la condition de Lorentz peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r})$ où **r** est le rayon vecteur d'un point d'observation quelconque.

143. En considérant la densité volumique de courant $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ et ses dérivées premières comme fonctions continues en tout point du domaine considéré (les courants superficiels et filiformes sont absents), démontrer que la composante normale du vecteur **j** s'annule sur la surface de séparation du courant et du vide.

144. Un courant constant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ circule dans un volume fini qui confine avec le vide. La fonction $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ est continue à l'intérieur du volume considéré y compris les points situés sur la surface de séparation. Démontrer que $\int \mathbf{j}\, dV = 0$.

145. Démontrer qu'en magnétostatique la solution générale de l'équation de Poisson

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

satisfait à la condition de Lorentz si les courants circulent dans un domaine limité ou décroissent à grande distance du point d'observation plus vite que $1/(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2$.

146. A quelle condition l'énergie d'un champ magnétique $W=\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}^2\,dV$ peut-elle être représentée sous la forme $W=\frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV$ où $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur du champ magnétique d'un courant circulant avec une densité volumique $\mathbf{j}$?

147. Un courant électrique de densité volumique $\mathbf{j}=\mathbf{j}(\mathbf{r})$ circule dans un domaine limité de l'espace. Démontrer que la formule $W=\frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV$ donnant l'énergie magnétique du courant restera inchangée si l'on passe du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ à un nouveau potentiel vecteur $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f$ où $f=f(\mathbf{r})$ est une fonction arbitraire

$$W=\frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV \quad \frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}'\,dV.$$

148. Déterminer la distribution de densité superficielle d'un courant si l'intensité $\mathbf{H}$ du champ magnétique uniforme créé par ce courant est de la forme: a) le vecteur $\mathbf{H}$ est parallèle à l'axe des Y dans la région comprise entre les plans $x=a$ et $x=b$ $(a<b)$ et est nul à l'extérieur de cette région; b) le vecteur $\mathbf{H}$ est parallèle à l'axe des Y dans le demi-espace $x<a$, antiparallèle à l'axe des Y dans le demi-espace $x>b$ $(a<b)$ et est nul entre les plans $x=a$ et $x=b$; c) le vecteur $\mathbf{H}$ est parallèle à l'axe d'une surface cylindrique à son intérieur et est nul à son extérieur.

149. En utilisant les coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, ainsi que les propriétés de la fonction delta, déterminer la distribution de densité volumique de courant $\mathbf{j}$ dans l'espace pour les cas suivants: a) une surface cylindrique de rayon R parcourue par un courant de densité superficielle uniforme $\mathbf{i}_0$ circulant parallèlement à son axe; b) un axe des Z parcouru dans le sens positif par un courant filiforme J; c) un plan XY parcouru par un courant de densité superficielle $\mathbf{i}_0$; d) un anneau infiniment mince de rayon R situé dans le plan XY et parcouru par un courant filiforme J, formant un système à droite avec l'axe des Z qui passe par le centre de l'anneau; e) une surface sphérique de rayon R uniformément chargée avec une densité superficielle σ et tournant autour de son diamètre avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ dirigée le long de l'axe des Z; f) la surface d'un cône circulaire de sommet à l'origine des coordonnées, uniformément chargée avec une densité superficielle σ et tournant autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ dirigée le long de l'axe des Z (l'angle solide du cône comprend la partie positive de l'axe des Z et est égal à $2\pi(1-\cos\theta)$).

150. Est-il possible de produire dans un plan YZ un courant électrique constant de densité superficielle

$$\mathbf{i} = (e^{-ay^2}\mathbf{1}_y + e^{-az^2}\mathbf{1}_z)\, i_0,$$

où a et i_0 sont des constantes?

151. Déterminer la configuration d'une région parcourue par un courant et le caractère de distribution du courant dans cette région si la densité volumique du courant dans l'espace illimité est décrite, en coordonnées cartésiennes, par la fonction suivante : a) $\mathbf{j} = 2a\mathbf{i}_0\delta \times \times (x^2 - a^2)$ où a est une constante et le vecteur constant $\mathbf{i}_0$ est parallèle au plan YZ; b) $\mathbf{j} = 2aJ\mathbf{1}_y\delta\,(x^2 - a^2)\,\delta\,(z)$ où a et J sont des constantes.

152. Un courant J parcourt un contour fermé d'épaisseur négligeable L. Démontrer que pour calculer l'intensité du champ magnétique $\mathbf{H}$ produit par ce courant on peut introduire le potentiel scalaire Φ d'après la formule $\mathbf{H} = -\text{grad}\,\Phi$. Donner l'équation et les conditions supplémentaires déterminant Φ.

153. Calculer le potentiel scalaire Φ et l'intensité $\mathbf{H} = -\text{grad}\,\Phi$ du champ magnétique produit par un courant filiforme J circulant le long de l'axe des Z.

§ 2. Moment magnétique

154. En coordonnées sphériques, les composantes du vecteur densité volumique moyenne $\mathbf{j}$ du courant orbital circulant dans un atome d'hydrogène excité ont pour valeur

$$j_r = j_\theta = 0 \quad \text{et} \quad j_\psi = \frac{1}{3^8}\,\frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7}\, e^{-\frac{2r}{3a}} \sin\theta \cos^2\theta,$$

où a est le rayon de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m la masse de l'électron, e la charge de l'électron et r la distance au proton. Calculer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant orbital.

155. La distribution de densité volumique de courant $\mathbf{j}$ dans l'espace est décrite par l'expression $\mathbf{j} = \text{rot}\,[\mathbf{a}F\,(r)]$ où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant et la fonction $F\,(r)$ décroît à l'infini plus vite que $1/r^3$. Exprimer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant par l'intégrale de la fonction $F\,(r)$.

156. La densité volumique d'un courant dans l'espace est de la forme $\mathbf{j}\,(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla)\,\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{r}_0$ sont des vecteurs constants. Déterminer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ de ce courant.

157. Le moment magnétique interne d'un électron est égal en valeur absolue au magnéton de Bohr $\mu_0 = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ où $\hbar$ est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière dans le vide et e et m sont la charge et la masse de l'électron. D'après son modèle classique,

l'électron représente une sphère de rayon $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ uniformément chargée. En considérant son moment magnétique interne en tant que résultat de la rotation de l'électron autour de son axe de symétrie, calculer la vitesse angulaire ω de cette rotation. En quelle proportion la vitesse de rotation angulaire variera-t-elle si l'on suppose que la charge e est uniformément étendue sur la surface de la sphère?

158. Démontrer que le moment magnétique $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int \times (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\, dV$ d'un courant circulant dans l'espace avec une densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées. On suppose que le moment magnétique du courant a une valeur finie.

159. Soit un domaine limité de l'espace parcouru par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. L'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique extérieur est uniforme à l'intérieur de ce domaine. Exprimer l'énergie magnétique $W = \frac{1}{c} \int \mathbf{jA}\, dV$ d'interaction entre le courant et le champ magnétique extérieur par le moment magnétique $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\, dV$ du courant. Ici, $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur du champ magnétique extérieur.

160. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur quelconque, uniformément chargé, qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire ω. La charge totale du cylindre est Q et son axe de rotation fait un certain angle avec l'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique uniforme extérieur. Déterminer l'énergie magnétique W d'interaction du cylindre et du champ magnétique extérieur.

161. Un domaine limité de l'espace est parcouru par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. L'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique extérieur est uniforme dans tout l'espace. Exprimer le moment $\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}))\, dV$ des forces agissant sur le courant par le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant. Démontrer que le moment des forces ne dépend pas du choix du point fixe par rapport auquel il est calculé.

162. Soit une surface cylindrique de rayon R et de hauteur h, uniformément chargée avec une densité superficielle σ, qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire ω. L'axe de rotation fait un certain angle avec l'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique uniforme extérieur. Déterminer le moment $\mathbf{N}$ des forces subies par la surface cylindrique.

163. L'intensité $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$ d'un champ magnétique extérieur varie peu sur l'étendue d'un certain domaine fini de l'espace où circulent des courants de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. En développant $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ en série de Taylor par rapport à un point intérieur de ce domaine

et en négligeant les dérivées d'ordre supérieur, exprimer la force

$$F = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H})\, dV$$

agissant sur le courant par le moment magnétique $\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\, dV$ de ce dernier.

§ 3. Champ magnétique à grande distance d'un courant-source

164. Soit un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b, uniformément chargé, qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son axe de symétrie. La charge totale de l'ellipsoïde est Q et son demi-axe b se situe sur l'axe de révolution. Déterminer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique à grande distance de l'ellipsoïde.

165. Soit une charge Q uniformément répartie sur une surface conique ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$) qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Déterminer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique à grande distance de la surface conique.

166. Un courant J parcourt un tube de courant d'épaisseur négligeable ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté a. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique à grande distance r du courant.

167. Soient deux surfaces sphériques de rayon R uniformément chargées et placées à grande distance l'une de l'autre. La charge totale de chacune des surfaces sphériques est Q et leurs vitesses angulaires de rotation autour de leurs propres axes de symétrie sont ω_1 et ω_2 respectivement. Déterminer l'énergie magnétique W d'interaction des surfaces sphériques.

168. Soit une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume d'un cône ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$) qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Une particule de moment magnétique interne $\boldsymbol{\mu}$ est placée à grande distance r du cône. Calculer la force **F** subie par la particule.

§ 4. Loi de Biot et Savart

169. La distribution de densité volumique d'un courant dans l'espace est de la forme $\mathbf{j} = j(\mathbf{r})\, \mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est un vecteur constant et $j(\mathbf{r})$ une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes. Démontrer qu'en tout point de l'espace l'intensité du champ magnétique créée par ce courant est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{1}$.

170. Soit une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume d'une sphère de rayon R. Calculer l'intensité **H** du champ

magnétique au centre de la sphère si cette dernière tourne autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. En quelle proportion l'intensité du champ magnétique au centre de la sphère variera-t-elle si la charge Q est uniformément répartie sur la surface de la sphère?

171. Soit une surface conique ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$) uniformément chargée avec une densité superficielle σ qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique au sommet de cette surface conique.

172. En coordonnées sphériques, les composantes du vecteur densité volumique moyenne **j** du courant orbital circulant dans un atome d'hydrogène excité ont pour grandeurs

$$j_r = j_\theta = 0$$

et

$$j_\psi = \frac{1}{2\cdot 3^8}\cdot\frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7}\, e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3 \theta,$$

où a est le rayon de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m la masse de l'électron, e la charge de l'électron et r la distance au proton. Le courant orbital engendre dans l'espace un champ magnétique. Calculer l'intensité **H** de ce champ magnétique à l'origine des coordonnées.

173. La densité moyenne de charge du nuage électronique dans un atome d'hydrogène est $\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ où a est le rayon de Bohr, r la distance au proton et e la charge de l'électron. Si cet atome est placé dans un champ magnétique extérieur d'intensité $\mathbf{H}_0$, le nuage électronique se mettra en rotation et produira dans l'espace un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc}(\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0)$ où m est la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide. L'intensité du champ magnétique au centre de l'atome, de quelle quantité $\Delta \mathbf{H}$ variera-t-elle par suite de la rotation du nuage électronique?

174. Soit une sphère de rayon R contenant une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'elle limite. Une moitié de la sphère tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω_1, et l'autre tourne avec une vitesse angulaire constante ω_2 en sens opposé. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique au centre de la sphère ainsi constituée. Quelles sont les fractions de la charge Q qu'il faut répartir uniformément à l'intérieur de la première et de la deuxième parties tournantes pour que l'intensité du champ magnétique au centre de la sphère soit nulle?

175. Soient des charges réparties dans l'espace avec une densité volumique ayant pour expression

$$\rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b}\,\delta\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right),$$

où a et b sont des constantes. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique à l'origine des coordonnées si les charges tournent autour de l'axe des Z avec une vitesse angulaire constante ω. Considérer les cas $a > b$ et $a < b$.

176. Soit un secteur sphérique formé par intersection d'une sphère de rayon R par une surface conique de sommet au centre de la sphère. Une charge Q est uniformément répartie dans le volume de ce secteur sphérique dont l'angle solide est $2\pi\,(1 - \cos\theta_0)$. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique au sommet du secteur sphérique si ce dernier tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω.

177. Une charge Q est uniformément répartie à l'intérieur d'un cône ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$) qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Une particule de moment magnétique interne $\boldsymbol{\mu}$ est placée au sommet du cône. Déterminer l'énergie magnétique W d'interaction entre la particule et le cône tournant.

178. En coordonnées sphériques, les composantes du vecteur densité volumique moyenne **j** du courant orbital circulant dans un atome d'hydrogène excité ont pour grandeurs

$$j_r = j_\theta = 0$$

et

$$j_\psi = \frac{e\hbar r}{64\pi m a^5}\, e^{-\frac{r}{a}} \sin\theta,$$

où a est le rayon de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m la masse de l'électron, e la charge de l'électron et r la distance au proton dont le moment magnétique interne $\boldsymbol{\mu}$ est dirigé suivant l'axe des Z. Déterminer l'énergie magnétique W d'interaction du moment magnétique du proton et du courant orbital. Puisque le courant orbital est dû au mouvement de l'électron, alors que le moment magnétique du proton est lié à son spin, le problème considéré décrit l'interaction spin-orbite entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène.

179. La densité volumique moyenne de courant dans l'atome d'hydrogène, due au spin de l'électron, est donnée par $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} [\boldsymbol{\mu}_0 F(r)]$ où $F(r) = \frac{1}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$. Ici, a est le rayon de Bohr, c la vitesse de la lumière dans le vide, r la distance au proton et $\boldsymbol{\mu}_0$ le moment magnétique interne de l'électron. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique au centre de l'atome d'hydrogène. Tenant compte du fait que le proton possède un moment magnétique interne $\boldsymbol{\mu}$,

déterminer l'énergie magnétique W d'interaction du proton avec le champ magnétique calculé. Puisque les moments magnétiques internes des particules sont liés à leurs spins, la grandeur W caractérise l'interaction spin-spin de l'électron et du proton dans l'atome d'hydrogène.

180. Une charge Q est uniformément répartie à l'intérieur du volume d'un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b $(a < b)$. L'ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son axe de symétrie passant le long du demi-axe b. Une particule de moment magnétique interne μ est placée au centre de l'ellipsoïde. Calculer le moment **N** des forces subi par cette particule.

181. Soit un disque infiniment mince de rayon R, uniformément chargé avec une densité superficielle σ, qui tourne autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. En se servant de la formule générale

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dS',$$

calculer l'intensité **H** du champ magnétique sur l'axe du disque. Ici, $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ est la densité superficielle du courant produit par le disque tournant. En étudiant l'intensité du champ magnétique à grande distance du disque, déterminer le moment magnétique μ du disque tournant. Obtenir aussi le moment magnétique par un calcul direct à l'aide de la formule

$$\mu=\frac{1}{2c}\int(\mathbf{r}\times\mathbf{i})\,dS.$$

182. La densité volumique d'un courant dans l'espace s'exprime par la fonction delta par l'expression $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\times\nabla)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{r}_0$ sont des vecteurs constants. Calculer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique. En discutant les expressions obtenues, donner l'interprétation physique du vecteur **a**.

183. Chaque unité de volume du nuage électronique dans l'atome d'hydrogène possède un moment magnétique dû au spin de l'électron. La distribution de densité de moment magnétique se décrit par la fonction $\mu_0 F(r)$, où μ_0 est le moment magnétique interne de l'électron et $F(r)$ la densité de nuage électronique à la distance r du proton. La fonction $F(r)$ décroît à l'infini plus vite que $1/r$. Montrer qu'une telle distribution de densité de moment magnétique produit dans l'espace le même champ magnétique que celui créé par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = c\,\mathrm{rot}\,[\mu_0 F(r)]$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

184. Un tube de courant mince, formant un angle droit est parcouru par un courant J. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique dans deux cas : a) sur l'axe des X qui est le prolongement de l'un des côtés de l'angle droit ; b) sur l'axe des Y passant par le sommet de l'angle droit perpendiculairement aux lignes de courant.

185. Un courant filiforme J circule dans le sens positif de l'axe des X de l'infini vers l'origine des coordonnées et puis, s'en va vers l'infini dans le sens des Z positifs. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique aux points situés sur la bissectrice de l'angle droit dont les côtés sont parcourus par ce courant.

186. Un courant J parcourt un tube de courant mince ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté a. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique au sommet du triangle.

187. Un courant J parcourt un tube de courant mince ayant la forme d'un carré de côté $2a$. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique sur l'axe passant par le centre du carré perpendiculairement à son plan. En discutant l'expression obtenue pour le champ magnétique à grande distance du carré, déterminer le moment magnétique μ du courant.

188. Un courant J parcourt un tube de courant mince, rectiligne et indéfini, qui présente une courbure locale sous forme d'un demi-cercle de rayon R. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique au centre de courbure de ce demi-cercle.

189. Soit un anneau d'épaisseur négligeable et de rayon R parcouru par un courant J. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer l'intensité **H** du champ magnétique sur l'axe de l'anneau, en l'exprimant par le moment magnétique μ du courant.

§ 5. Théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique

190. Soit un cylindre indéfini de rayon R à l'intérieur duquel circule, parallèlement à son axe, un courant de densité volumique uniforme **j**. En utilisant le théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique, calculer la valeur de **H** à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. A partir de la relation $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, déterminer le potentiel vecteur **A** du champ magnétique. Prendre comme zéro des potentiels vecteurs le potentiel sur la surface du cylindre.

191. La densité volumique de courant à l'intérieur d'un cylindre indéfini de rayon R présente une symétrie axiale $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$ où la fonction vectorielle $\mathbf{j}(r)$ est constante en direction et dépend arbitrairement de la distance r à l'axe du cylindre. En utilisant le théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique, calculer la valeur de **H** à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. En déterminant le potentiel vecteur **A** à partir de la relation $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, poser que la fonction **A** cherchée s'annule sur la surface du cylindre.

192. Un courant J est uniformément réparti suivant la section d'un cylindre indéfini de rayon R. En utilisant le tenseur de tensions de Maxwell, calculer la force **F** qui applique l'une contre l'autre les deux moitiés identiques du cylindre. Ici, **F** est la force qui s'applique à l'unité de longueur de l'une des moitiés du cylindre. Confirmer le

résultat obtenu par un calcul direct faisant intervenir la force volumique.

193. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R parcourue par un courant de densité superficielle uniforme $\mathbf{i}_0$ qui circule parallèlement à son axe. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique sans avoir recours au potentiel vecteur.

194. Le plan XY est parcouru, parallèlement à l'axe des X, par un courant de densité superficielle uniforme $\mathbf{i}_0$. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique sans avoir recours au potentiel vecteur.

195. L'espace entre deux surfaces cylindriques coaxiales de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) est parcouru par un courant de densité volumique **j** qui est uniforme suivant la section du tube de courant et parallèle à son axe. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace.

196. Un courant de densité volumique uniforme **j** circule à l'intérieur d'une plaque indéfinie, parallèlement à ses surfaces $z = l$ et $z = -l$. Déterminer, sans se servir du potentiel vecteur, l'intensité **H** du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque si les lignes de courant sont parallèles à l'axe des Y.

197. Soient deux droites dont l'une ($x = l$, $y = 0$) est parcourue, parallèlement à l'axe des Z, par un courant J et l'autre ($x = -l$, $y = 0$) est parcourue par un courant antiparallèle de même grandeur. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique. Etudier **H** à grande distance des courants donnés.

198. Soit un cadre carré de côté a, situé dans le plan d'un courant rectiligne J. A quelle distance r du courant se trouve le côté le plus proche du cadre si le flux de champ magnétique traversant la surface du cadre est égal à Φ_0?

199. Un courant rectiligne J_1 se trouve dans le même plan qu'un courant J_2 parcourant un cadre carré d'épaisseur négligeable de côté a. Le côté le plus proche du cadre se situe à la distance r du courant J_1 et est parcouru par le courant dans le même sens. Quelle est la force **F** subie par le cadre?

200. Soient deux plans dont l'un $z = l$ est parcouru par un courant de densité superficielle uniforme $\mathbf{i}_0$ circulant parallèlement à l'axe des Y et l'autre $z = -l$ est parcouru par un courant antiparallèle de même grandeur. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace. Quelle sera la forme du vecteur **H** si les courants parcourant les deux plans sont parallèles à l'axe des Y?

201. Soit un courant filiforme J qui circule le long de l'axe des Z d'un point placé à l'infini $z = -\infty$ vers l'origine des coordonnées. Dans le plan XY, il se répartit uniformément dans tous les sens depuis l'origine des coordonnées. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace et vérifier si la condition à la limite est satisfaite pour le vecteur **H** à la traversée du plan XY.

Représenter le vecteur **H** par la somme de deux termes $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ qui sont dus respectivement aux courants filiforme et superficiel.

202. Un courant filiforme J circule le long de l'axe des Z dans le sens positif depuis un point à l'infini $z = -\infty$. En un point $z = -R$ ce courant se répartit uniformément sur la surface d'une sphère de rayon R et de centre à l'origine des coordonnées. Puis, il se concentre de nouveau en un point diamétralement opposé $z = R$ et continue à circuler le long de la partie restante de l'axe des Z. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique dans l'espace et vérifier si la condition à la limite est satisfaite pour le vecteur **H** à la traversée de la sphère indiquée.

203. En partant de la loi de Biot et Savart

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

obtenir la relation $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J$. Ici L est un contour à intégration quelconque entrelacé avec le contour de courant L' et **H** l'intensité du champ magnétique produit par le courant J.

204. Soient deux surfaces cylindriques indéfinies non coaxiales de rayons R_1 et R_2 $(R_1 + l < R_2)$. L'espace compris entre ces surfaces est parcouru, parallèlement aux axes de ces dernières, par un courant avec une densité volumique uniforme **j**. La distance entre les axes des surfaces cylindriques est l. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique à l'intérieur de la cavité cylindrique de rayon R_1.

205. Soient deux plaques indéfinies infiniment minces situées dans le plan XZ et séparées l'une de l'autre par une fente de largeur a. La ligne centrale de la fente est confondue avec l'axe des Z. Les plaques sont parcourues, parallèlement à l'axe des Z, par un courant avec une densité superficielle $\mathbf{i}_0$. Calculer l'intensité **H** du champ magnétique à grande distance $r \gg a$ de la fente, en tenant compte des termes d'ordre $1/r$.

206. Soit un cylindre indéfini de rayon R_1 disposé non coaxialement à l'intérieur d'un autre cylindre de rayon R_2. Les deux cylindres sont parcourus par des courants antiparallèles avec des densités volumiques uniformes $\mathbf{j}_1$ et $\mathbf{j}_2$ respectivement. Le courant du cylindre extérieur ne pénètre pas dans le cylindre intérieur. La distance entre les axes de ces cylindres indéfinis est l. Calculer la force **F** subie par unité de longueur du cylindre intérieur.

207. Déterminer la valeur de $W = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2 \, dV$ rapportée à l'unité de longueur des cylindres décrits dans le problème précédent. Ici, $\mathbf{A}_2$ est le potentiel vecteur du champ magnétique produit par le courant $\mathbf{j}_2$. Pour rendre univoque le résultat obtenu, poser que le potentiel vecteur produit par les courants de chaque cylindre homo-

gène plein est nul sur sa surface. S'assurer que la force subie par l'unité de longueur du cylindre intérieur est, en valeur absolue, égale à $F = \frac{\partial W}{\partial l}$.

§ 6. Equations de Laplace et de Poisson avec conditions supplémentaires

208. En coordonnées sphériques, deux composantes du potentiel vecteur **A** sont nulles $A_r = A_\theta = 0$, et la troisième est de la forme

$$A_\psi = ar\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\sin\theta \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

et

$$A_\psi = \frac{2aR^5}{15r^2}\sin\theta \qquad \text{pour } r \geqslant R,$$

où a et R sont des constantes. Déterminer la distribution de densité volumique **j** du courant qui a produit le champ magnétique de potentiel vecteur donné.

209. En coordonnées cylindriques, deux composantes du potentiel vecteur sont nulles $A_r = A_z = 0$, et la troisième est de la forme

$$A_\psi = ar\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right) \quad \text{pour } r \leqslant R$$

et

$$A_\psi = \frac{aR^4}{2r} \qquad \text{pour } r \geqslant R,$$

où a et R sont des constantes. Déterminer la distribution de densité volumique **j** du courant qui a créé le champ magnétique de potentiel vecteur donné.

210. En coordonnées sphériques, deux composantes du potentiel vecteur sont nulles $A_r = A_\theta = 0$, et la troisième est de la forme

$$A_\psi = ar\sin\theta \text{ pour } r \leqslant R \quad \text{et} \quad A_\psi = \frac{aR^3}{r^2}\sin\theta \text{ pour } r \geqslant R,$$

où a et R sont des constantes. Déterminer la distribution de densité superficielle **i** du courant qui a engendré le champ magnétique de potentiel vecteur donné.

211. Le passage d'un potentiel vecteur **A** (**r**) à un nouveau potentiel vecteur **A'** (**r**) = **A** (**r**) + grad f, la fonction $f = f$ (**r**) étant une fonction arbitraire des coordonnées, ne change pas l'intensité d'un champ magnétique statique. La fonction f (**r**), à quelle condition doit-elle satisfaire pour que le passage à un nouveau potentiel vecteur ne modifie pas non plus la condition de Lorentz en magnétostatique?

212. La densité volumique d'un courant varie dans l'espace d'un point à l'autre suivant une loi périodique $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}$ où les

vecteurs constants $\mathbf{j}_0$ et $\mathbf{k}$ satisfont à la relation $\mathbf{k}\mathbf{j}_0 = 0$. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et l'intensité $\mathbf{H}$ du champ magnétique qui sont produits par ce courant dans l'espace indéfini.

213. La densité volumique d'un courant dans un demi-espace $z \leqslant 0$ présente une structure périodique $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}$ où les vecteurs constants $\mathbf{j}_0$ et $\mathbf{k}$ satisfont à la relation $\mathbf{k}\mathbf{j}_0 = 0$, le vecteur $\mathbf{j}_0$ étant parallèle au plan XY et les trois composantes du vecteur $\mathbf{k}$ étant non nulles. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique en tout point de l'espace.

214. Soit un plan XY parcouru par un courant avec une densité superficielle $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cos \mathbf{lr}$ où les vecteurs constants $\mathbf{i}_0$ et $\mathbf{l}$ se situent dans le plan indiqué et satisfont à la relation $\mathbf{l}\mathbf{i}_0 = 0$. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique en tout point de l'espace.

215. Les plans XY, XZ et YZ d'un système de coordonnées cartésiennes sont parcourus par des courants superficiels dont les densités respectives sont $\mathbf{i}_1 = \mathbf{a}_1 \cos \mathbf{l}_1\mathbf{r}$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{a}_2 \cos \mathbf{l}_2\mathbf{r}$ et $\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_3 \cos \mathbf{l}_3\mathbf{r}$. Les vecteurs constants $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ et $\mathbf{l}_3$ satisfont à la condition $\mathbf{a}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{a}_2\mathbf{l}_2 = \mathbf{a}_3\mathbf{l}_3 = 0$ et se situent dans les plans XY, XZ et YZ respectivement. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique en tout point de l'espace.

216. L'intérieur d'une plaque indéfinie, limitée par les plans $x = a$ et $x = -a$, est parcouru par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \sin l_1 x \sin l_1 y$ où le vecteur constant $\mathbf{j}_0$ est parallèle à l'axe des Z. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque.

217. Soit un cylindre indéfini de rayon R parcouru, parallèlement à son axe, par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 r^s \cos n\psi$ où r est une coordonnée cylindrique, ψ un angle polaire et l'axe des Z se confond avec l'axe du cylindre. Le nombre entier positif n et la constante s satisfont à la condition $n^2 \neq (s+2)^2$. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

218. La densité volumique d'un courant en coordonnées cylindriques est de la forme

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad \text{pour } r \geqslant R,$$

où le vecteur constant $\mathbf{j}_0$ est parallèle à l'axe des Z, R est une constante et le nombre entier positif n est supérieur à l'unité. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique en tout point de l'espace.

219. Soit un cylindre indéfini de rayon R, uniformément chargé avec une densité volumique ρ, qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω. Calculer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et

l'intensité **H** du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

220. Soit un cylindre indéfini de rayon R parcouru, parallèlement à son axe, par un courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$, r étant la distance à l'axe du cylindre. En se servant de l'équation du potentiel vecteur **A**, calculer sa valeur à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Le terme constant arbitraire du potentiel vecteur est à choisir de façon que la valeur de **A** sur la surface du cylindre soit nulle.

221. Soit une sphère de rayon R contenant une charge uniformément répartie avec une densité volumique ρ à l'intérieur du volume qu'elle limite et tournant autour de son axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Calculer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Exprimer **A** et **H** à l'extérieur de la sphère par son moment magnétique μ.

222. En utilisant le tenseur de tensions de Maxwell et le résultat obtenu dans le problème précédent, déterminer la force magnétostatique **F** avec laquelle l'une des moitiés de la sphère agit sur l'autre dans le sens de l'axe de rotation.

223. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R parcourue, parallèlement à son axe, par un courant avec une densité superficielle $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cos n\psi$, où n est un nombre entier ($n > 1$), φ l'angle polaire et l'axe des Z coïncide avec l'axe de la surface cylindrique et est dirigé dans le même sens que le vecteur constant $\mathbf{i}_0$. Calculer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace.

224. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R, parcourue par un courant avec une densité superficielle uniforme $\mathbf{i}_0$. Le vecteur $\mathbf{i}_0$ est parallèle à l'axe de la surface. En se servant de l'équation pour le potentiel vecteur, calculer la valeur de **A** à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique. Calculer aussi l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace.

225. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R, uniformément chargée avec une densité superficielle σ, qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω et, en même temps, se déplace le long du même axe avec une vitesse **v**. Calculer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique en tout point de l'espace.

226. Soit une surface sphérique de rayon R uniformément chargée avec une densité superficielle σ et tournant autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. Déterminer le potentiel vecteur **A** et l'intensité **H** du champ magnétique en un point quelconque de l'espace. En étudiant les expressions obtenues, déterminer le moment magnétique μ de la sphère tournante. Obtenir aussi le moment magnétique par un calcul direct au moyen de la

formule $\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{i})\, dS$ où $\mathbf{i}$ est la densité superficielle de courant produit par la sphère en rotation.

227. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R parcourue par un courant de densité superficielle $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1$ pour $0 < \psi < \pi$ et $\mathbf{i} = \mathbf{i}_2$ pour $\pi < \psi < 2\pi$ où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ sont des vecteurs constants, ψ est l'angle polaire et l'axe des Z coïncide avec l'axe de la surface cylindrique et est parallèle aux vecteurs $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$. Déterminer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique.

§ 7. Energie d'un champ magnétique

228. En coordonnées sphériques, les composantes H_r, H_θ et H_ψ de l'intensité $\mathbf{H}$ d'un champ magnétique sont :

$$H_r = b\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\theta,$$

$$H_\theta = b\left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\sin\theta, \qquad H_\psi = 0 \quad \text{pour } r < R$$

et

$$H_r = \frac{2bR^5}{15r^3}\cos\theta, \quad H_\theta = \frac{bR^5}{15r^3}\sin\theta, \quad H_\psi = 0 \quad \text{pour } r > R,$$

où b et R sont des constantes. En se servant de la relation $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, déterminer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ magnétique pour une condition supplémentaire $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Déterminer la distribution de densité volumique de courant $\mathbf{j}$ et calculer l'énergie W du champ magnétique par deux procédés à l'aide des formules (II.23) et (II.24).

229. Déterminer l'énergie W du champ magnétique d'une surface sphérique de rayon R, uniformément chargée, qui tourne autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. La charge totale de la sphère est Q. Exprimer l'énergie W par le moment magnétique μ de la sphère tournante.

230. Déterminer l'énergie W du champ magnétique d'une sphère de rayon R, contenant une charge totale Q uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'elle limite et tournant autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. Exprimer l'énergie W par le moment magnétique μ de la sphère tournante.

231. Déterminer l'énergie W du champ magnétique par unité de longueur d'un cylindre indéfini de rayon R, uniformément chargé, tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω. La charge par unité de longueur du cylindre est q. Exprimer l'énergie W par le moment magnétique μ par unité de longueur du cylindre tournant.

232. Déterminer l'énergie W du champ magnétique par unité de longueur d'une surface cylindrique indéfinie de rayon R uniformément chargée avec une densité σ qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω. Exprimer l'énergie W par le moment magnétique μ de l'unité de longueur de la surface cylindrique tournante.

233. Déterminer l'énergie W du champ magnétique par unité de longueur de la surface cylindrique décrite dans le problème 223.

234. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R dont l'une des moitiés est parcourue, parallèlement à son axe, par un courant de densité superficielle $\mathbf{i}$ et l'autre par un courant antiparallèle de même grandeur. Déterminer l'énergie W du champ magnétique par unité de longueur de la surface cylindrique.

235. Soient deux cylindres indéfinis de rayon R séparés par une distance l, dont l'un est parcouru par un courant J de densité uniforme et l'autre par un courant antiparallèle de même grandeur. Déterminer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et l'intensité $\mathbf{H}$ du champ magnétique à grande distance des cylindres. L'énergie du champ magnétique par unité de longueur d'un tel système, aura-t-elle une valeur finie?

CHAPITRE III

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE VARIABLE

Dans le cas général, les intensités **E** et **H** des champs électrique et magnétique satisfont aux équations de Maxwell :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{III.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{III.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{III.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{III.4}$$

où ρ et **j** sont respectivement les distributions de densité volumique de la charge et du courant dans l'espace.

Des charges ponctuelles e_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ se déplaçant avec des vitesses $\mathbf{v}_i$ produisent dans l'espace une distribution de densité volumique de charge et de courant conformément aux formules

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{III.5}$$

où $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ est le rayon vecteur de la i-ème charge. La fonction $\mathbf{r}_i(t)$ est donnée dans chaque cas concret ou est trouvée par résolution de l'équation du mouvement.

Des équations (III.2) et (III.3) on déduit l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{III.6}$$

dont l'intégration portée sur le volume donne la loi de la conservation de la charge

$$\oint_S \mathbf{j}\, dS = -\frac{dQ}{dt}. \tag{III.7}$$

Ici, Q est la charge totale contenue à l'intérieur de la surface fermée S qui limite le volume considéré.

5—0759

Parfois, le développement d'un champ électromagnétique en intégrale de Fourier ne contient que des composantes à petites valeurs de la pulsation $\omega \ll \frac{c}{L}$, où L est la dimension linéaire maximale du domaine considéré de l'espace. Un tel champ électromagnétique lentement variable à l'intérieur du domaine donné est dit quasi stationnaire. Il se décrit par les équations de Maxwell (III.1) à (III.4) dans lesquelles les termes $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ et $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ sont omis (ce qui est équivalent à négliger les effets liés à la valeur finie de la vitesse de propagation de la perturbation électromagnétique à l'intérieur du domaine indiqué). C'est ainsi par exemple qu'un système de charges e_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), se déplaçant avec des vitesses non relativistes $v_i \ll c$ à l'intérieur d'un volume de dimension linéaire maximale l, produit dans le vide un champ électromagnétique de pulsations comprises dans l'intervalle $0 \leqslant \omega \lessdot \frac{v_i}{l}$ qui est quasi stationnaire dans un large domaine de l'espace de dimension linéaire $L \ll \ll \frac{c}{v} l$, où v est la vitesse maximale de ces charges.

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et l'intensité $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ d'un champ magnétique quasi stationnaire sont décrits par les mêmes équations qu'en magnétostatique dans lesquelles le temps t intervient comme paramètre. De façon analogue, le potentiel scalaire $\varphi(\mathbf{r}, t)$ et l'intensité $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ d'un champ électrique dans un domaine quasi stationnaire sont définis de même qu'en électrostatique. En particulier, à grande distance $l \ll r \ll \frac{c}{v} l$ d'un système de charges de dimension linéaire maximale l, sont valables les formules (I.14), (II.18) et (II.19) dans lesquelles les sources de champ dépendent du temps t considéré comme paramètre.

Le moment électrique dipolaire, le tenseur de moment électrique quadrupolaire et le moment magnétique d'un système de charges en mouvement ont pour expressions

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \quad D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i \left(3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}\right), \tag{III.8}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} e_i \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\right), \tag{III.9}$$

où le rayon vecteur $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ et la vitesse $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t)$ de la i-ème charge sont fonctions du temps.

Les champs électromagnétiques qui se propagent dans l'espace libre sont appelés ondes électromagnétiques. Ces ondes sont décrites par les équations homogènes de Maxwell.

Quand les ondes électromagnétiques se propagent dans l'espace libre, les équations homogènes de Maxwell se ramènent à deux équations d'onde indépendantes:

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0, \qquad \text{(III.10)}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0. \qquad \text{(III.11)}$$

Dans ce cas, de toutes les solutions de ces dernières équations on choisit seulement celles qui satisfont aussi aux équations homogènes de Maxwell.

En règle générale, les ondes électromagnétiques dans le vide sont étudiées à l'aide des potentiels électromagnétiques qu'on choisit de façon que le potentiel scalaire soit nul, $\varphi = 0$, et le potentiel vecteur **A** satisfasse à l'équation d'onde

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(III.12)}$$

et à la condition supplémentaire

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \qquad \text{(III.13)}$$

Alors, les intensités des champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique s'expriment par le potentiel vecteur à l'aide des relations:

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad \text{(III.14)}$$

Les ondes électromagnétiques qui se décrivent par le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}\left(t-\frac{\mathbf{nr}}{c}\right), \quad \mathbf{nA}=0, \qquad \text{(III.15)}$$

sont dites planes. Elles se propagent dans le sens du vecteur unité **n** avec la vitesse c.

L'intensité de champ électrique **E** et l'intensité de champ magnétique **H** d'une onde plane sont égales en module: $E = H$, et forment avec le vecteur **n** un trièdre direct

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \qquad \text{(III.16)}$$

La densité de flux d'énergie électromagnétique $\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ et la densité d'impulsion $\mathbf{g}=\frac{1}{c}\mathbf{s}$ du champ électromagnétique sont liées à la densité d'énergie $w=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$ d'une onde plane par les relations

$$\mathbf{s}=cw\mathbf{n}, \quad \mathbf{g}=\frac{1}{c}w\mathbf{n}. \qquad \text{(III.17)}$$

Les ondes électromagnétiques dont la variation en fonction du temps t se décrit par une fonction périodique simple de la forme cos $(\omega t + \alpha)$ sont dites monochromatiques. La grandeur ω représente la fréquence cyclique (on dit aussi fréquence tout court) de ces ondes. Un cas particulier important de telles ondes est représenté par l'onde monochromatique plane.

Il est parfois avantageux de représenter l'intensité du champ électrique d'une onde monochromatique plane par la partie réelle de l'expression complexe

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}], \qquad \text{(III.18)}$$

où $\mathbf{kr} - \omega t$ est la phase de l'onde, $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde ($\mathbf{k} = \omega/c$), ω la fréquence cyclique (ou fréquence tout simplement) de l'onde et $\mathbf{E}_0$ un vecteur complexe qui satisfait à la condition $\mathbf{E}_0\mathbf{k} = 0$ d'orthogonalité des ondes électromagnétiques à leur direction de propagation dans le vide. Le module du vecteur $\mathbf{E}_0$ est lié à l'amplitude de l'onde. Des raisonnements analogues sont également valables pour l'intensité du champ magnétique.

Du vecteur $\mathbf{E}_0$ on sépare le facteur complexe $e^{-i\alpha}$

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{-i\alpha}, \qquad \text{(III.19)}$$

de façon que le carré du vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2, \qquad \text{(III.20)}$$

soit, de même que les vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ eux aussi, une quantité réelle. A cet effet, il faut que soit satisfaite la condition $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$. En outre, les vecteurs réels $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont perpendiculaires au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ qui indique la direction de propagation de l'onde (III.18).

Si l'on choisit l'axe des X le long du vecteur $\mathbf{b}_1$ et l'axe des Z dans le sens de propagation de l'onde, les projections de l'intensité du champ électrique (III.18) s'écriront

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha). \qquad \text{(III.21)}$$

Les grandeurs variables E_x et E_y satisfont à l'équation

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \qquad \text{(III.22)}$$

On voit qu'en tout point de l'espace l'extrémité du vecteur intensité de champ électrique décrit une ellipse dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. De telles ondes s'appellent ondes polarisées elliptiquement. Les signes + et − devant le coefficient b_2 dans la formule (III.21) correspondent à la polarisation droite et à la polarisation gauche.

Dans le cas où $b_1 = b_2 = b$, l'ellipse se transforme en une circonférence et l'onde (III.18) est dite polarisée circulairement. La quanti-

té b, qui est numériquement égale au module de l'intensité de champ électrique, est l'amplitude de cette onde.

Si l'un des vecteurs $\mathbf{b}_1$ ou $\mathbf{b}_2$ s'annule, l'onde est dite polarisée linéairement (polarisée dans le plan). Elle s'écrit sous l'une de deux formes :

$$\mathbf{E} = \mathbf{1} E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \qquad \text{(III.23)}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{1} E_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t - \alpha)}, \qquad \text{(III.24)}$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur polarisation unité, E_0 l'amplitude et α un déphasage constant. Seule la partie réelle ou seule la partie imaginaire de l'expression complexe (III.24) a un sens physique.

Dans le cas idéal où la longueur d'onde est infiniment petite, la propagation des ondes électromagnétiques se décrit par les lois de l'optique géométrique. Pour des ondes dont la longueur ne peut pas être considérée comme étant infiniment petite, on observe un écart aux lois de l'optique géométrique et les phénomènes spécifiques qui se manifestent dans la propagation des ondes portent le nom de diffraction. Par exemple, la diffraction rend confuse la limite entre la lumière et l'ombre derrière un corps opaque (un écran) situé dans la direction de propagation de la lumière. Les phénomènes de diffraction varient notablement suivant les distances de la source de rayonnement et du point d'observation à l'écran.

Dans le cas où la source de rayonnement des ondes électromagnétiques ou le point d'observation ou, enfin, tous les deux se trouvent à une distance finie de l'écran (de l'obstacle), le phénomène de diffraction porte le nom de diffraction Fresnel.

Si la source de rayonnement des ondes électromagnétiques et le point d'observation se situent à très grandes (infiniment grandes) distances de l'écran, il y aura des phénomènes de diffraction Fraunhofer.

La diffraction Fraunhofer s'observe dans un cas présentant un intérêt particulier pour les applications pratiques, lorsqu'une onde électromagnétique plane rencontre sur son trajet un écran plan. Les ondes diffractées qui apparaissent sont faciles à déterminer d'une façon approchée, si on se limite à de faibles écarts à l'optique géométrique, c'est-à-dire à de petits angles entre les directions de propagation des ondes incidente et diffractée. Dans ce qui suit nous considérons ce cas le plus simple.

Soit un écran plan situé dans le plan XY et présentant un orifice de surface S. Sur cet écran tombe une onde monochromatique plane que nous écrirons en notation complexe (III.24). Désignons par u l'une quelconque des composantes des vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ de cette onde sans le facteur temporel $e^{-i\omega t}$. Puisque, par hypothèse, l'écart par rapport à l'optique géométrique est faible, le champ aux points de l'orifice est le même qu'en l'absence de l'écran, c'est-à-dire se décrit par la grandeur $u = u_0$ aux points de l'orifice. En d'autres termes,

aux points de l'orifice de l'écran le champ de l'onde diffractée coïncide avec le champ de l'onde plane incidente. Aux points situés sur l'écran, le champ diffracté est nul.

Sous ces hypothèses, la composante de Fourier de l'onde diffractée considérée aux points de l'orifice de l'écran, s'écrira sous la forme d'une intégrale double

$$u_{\mathbf{q}} = \int\limits_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dx\, dy, \tag{III.25}$$

où l'intégration est effectuée sur la surface de l'orifice dans l'écran. Le vecteur $\mathbf{q}$ se situe dans le plan XY. Il est lié par la relation $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ aux vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ des ondes incidente et diffractée ($k = k' = \omega/c$). L'angle θ que font les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ s'appelle angle de diffraction. Puisque les angles de diffraction sont petits $\theta \ll 1$, le module du vecteur $\mathbf{q}$ s'exprime par la fréquence de l'onde incidente comme suit

$$q = \frac{\omega}{c}\,\theta. \tag{III.26}$$

La distribution angulaire de la moyenne temporelle sur une période d'oscillation de l'intensité de l'onde diffractée s'exprime par

$$dI = \frac{I_0}{S}\left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 \frac{dq_x\, dq_y}{(2\pi)^2} = \frac{I_0}{S}\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 d\Omega. \tag{III.27}$$

Dans cette formule, S est l'aire de l'orifice de l'écran, $d\Omega = \theta\, d\theta\, d\psi$ l'élément d'angle solide et I_0 la moyenne temporelle de l'intensité totale de l'onde monochromatique plane incidente qui passe par l'orifice normalement au plan de l'écran.

Les ondes diffractées derrière l'écran peuvent également être déterminées en résolvant l'équation de l'onde avec des conditions aux limites sur la surface de l'écran et aux points de son orifice.

On dit que deux écrans sont complémentaires l'un par rapport à l'autre si l'un d'eux présente un orifice là où l'autre est opaque et inversement. A de tels écrans s'applique le principe de Babinet: les écrans complémentaires produisent les mêmes distributions d'intensité de la lumière diffractée.

§ 1. Equations de Maxwell

236. Un champ électrique variable dans le temps, peut-il exister à l'intérieur d'une cavité sans champ magnétique?

237. Un champ magnétique variable dans le temps peut-il exister sans champ électrique?

238. Un champ électrique uniforme, peut-il exister en présence d'un champ magnétique variable dans le temps?

239. Un champ électrique (ou magnétique) uniforme, peut-il varier dans le temps?

240. En déduisant le principe de la conservation de l'énergie électromagnétique en tant qu'une conséquence des équations de Maxwell, on remplace généralement l'expression $\frac{c}{4\pi}$ (**H** rot **E** — — **E** rot **H**) par div **s** où $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ est le vecteur de Poynting. Démontrer que **s** n'est pas le seul vecteur dont la divergence soit égale à l'expression indiquée.

241. En coordonnées cylindriques, les composantes du vecteur intensité d'un champ magnétique dans l'espace libre sont de la forme $H_r = H_\psi = 0$ et $H_z = H(r, t)$, où la fonction $H(r, t)$ et ses dérivées sont bornées. Déterminer l'intensité **E** du champ électrique rotationnel induit par ce champ magnétique.

242. Soit une sphère contenant une charge Q et une masse m uniformément réparties à l'intérieur du volume qu'elle limite. A l'instant initial $t_0 = 0$ on applique un champ magnétique extérieur d'intensité $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ qui est constant en direction et satisfait à la condition initiale $\mathbf{H}(0) = 0$. La variation du vecteur **H** en fonction des coordonnées peut être négligée dans les limites de la sphère. Sous l'effet du champ magnétique la sphère se met en rotation. En négligeant l'influence réciproque de la sphère tournante sur le champ magnétique extérieur, calculer la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\omega}$.

243. Démontrer que les potentiels électromagnétiques retardés

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV',$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

satisfont à la condition de Lorentz.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Les intégrales de volume indiquées sont supposées convergentes.

244. Obtenir les équations pour le potentiel scalaire φ et le potentiel vecteur **A** en prenant comme zéro des potentiels le potentiel coulombien $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Les grandeurs φ et **A** sont définies par les relations

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

§ 2. Densité de charge. Densité de courant

245. Une charge e se déplace dans le plan XY en s'éloignant de l'origine des coordonnées suivant la droite $y = x - l$ avec une

vitesse constante **v**. A l'instant initial $t_0 = 0$, elle se trouvait sur l'axe des X. Déterminer la distribution de densité volumique de charge ρ et de densité volumique de courant **j** dans l'espace.

246. Une charge e est animée d'une oscillation harmonique le long de l'axe des X suivant une loi $x = a \sin \omega t$. Donner les expressions pour la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant **j**. Vérifier si l'équation de continuité est valable pour ces grandeurs. Calculer les moyennes temporelles sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ des densités volumiques de charge $\bar{\rho}$ et de courant $\bar{\mathbf{j}}$ et démontrer que

$$\int \bar{\rho}\, dV = e.$$

247. Une charge e se meut dans le plan XY suivant une circonférence de rayon R avec une vitesse angulaire constante ω. A l'instant initial $t_0 = 0$, elle se trouvait sur l'axe des X. Donner les expressions pour la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant **j** en coordonnées cylindriques dont l'origine est confondue avec le centre de la circonférence. Vérifier si l'équation de continuité est valable pour ces grandeurs. Démontrer que les moyennes temporelles sur une période $T = 2\pi/\omega$ des densités volumiques de charge $\bar{\rho}$ et de courant $\bar{\mathbf{j}}$ satisfont aux relations

$$\int \bar{\rho}\, dV = e, \quad \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz \bar{j}_{\varphi} = \frac{e}{T}.$$

248. Soit une circonférence de rayon R uniformément chargée avec une densité linéique q et tournant autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. Déterminer la distribution de densité volumique de charge ρ et de densité volumique de courant **j** dans l'espace en coordonnées sphériques. L'origine des coordonnées se confond avec le centre de la circonférence et l'axe des Z est dirigé suivant l'axe de rotation. Vérifier si l'équation de continuité est valable pour les grandeurs trouvées.

249. Soit une sphère de rayon R contenant une charge Q uniformément répartie à l'intérieur du volume qu'elle limite et tournant autour de son diamètre fixe avec une vitesse angulaire ω variable dans le temps. Déterminer la distribution de densité volumique de charge ρ et de densité volumique de courant **j** dans l'espace en coordonnées sphériques.

250. Déterminer le champ électromagnétique quasi stationnaire produit par une charge e qui se meut lentement avec une vitesse constante **v**.

§ 3. Moment magnétique, moment électrique dipolaire et moment électrique quadrupolaire des charges en mouvement

251. Soit une sphère de rayon R, contenant une charge Q et une masse m uniformément réparties à l'intérieur du volume qu'elle limite et tournant autour de son centre fixe avec une vitesse angulaire quelconque $\omega = \omega(t)$. Déterminer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ de la sphère tournante. Calculer le facteur de proportionnalité β entre le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et le moment cinétique $\mathbf{M}$: $\boldsymbol{\mu} = \beta\mathbf{M}$.

252. Soit un système mécanique fermé constitué par deux particules en mouvement quelconque dont les charges et les masses sont respectivement e_1 et e_2 et m_1 et m_2. Démontrer que si l'origine des coordonnées est choisie au centre d'inertie de ce système, son moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et son moment cinétique $\mathbf{M}$ sont proportionnels l'un à l'autre et calculer le facteur de proportionnalité.

253. Un système mécanique comprenant un nombre fini de particules caractérisées par un seul et même rapport de la charge à la masse se meut dans l'espace. L'impulsion totale $\mathbf{P}$ de ce système, à quelle condition doit-elle satisfaire pour que le moment magnétique total de toutes les particules soit indépendant du choix de l'origine des coordonnées?

254. Un disque d'épaisseur négligeable et de rayon R, uniformément chargé, tourne autour de son diamètre fixe avec une vitesse angulaire ω. La charge totale du disque est Q. Calculer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du disque tournant.

255. Un cadre carré de côté a, uniformément chargé avec une densité linéique q, tourne avec une vitesse angulaire ω autour de l'un de ses côtés. Calculer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du cadre tournant.

256. Un neutron de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_0$ se déplace sur une trajectoire donnée et son rayon vecteur $\mathbf{r}_n$ varie dans le temps comme $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t)$. Déterminer la distribution de densité de moment magnétique $\mathbf{I}_n$ dans l'espace

$$\mathbf{I}_n(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t)}{\Delta V},$$

où $\Delta\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t)$ est le moment magnétique de l'élément de volume ΔV. Ce dernier tend vers le point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ quand $\Delta V \to 0$.

257. Une particule de masse m et de charge e est animée d'un mouvement elliptique dans un champ d'attraction de potentiel coulombien α/r où $\alpha < 0$. L'énergie totale de la particule est $\mathscr{E}$. Calculer la moyenne temporelle, sur une période de mouvement, du moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ de la charge. Exprimer ce moment par l'intégrale spécifique du mouvement dans le champ coulombien

$\mathbf{I} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$, v étant la vitesse de la particule chargée et M son moment cinétique.

258. Le rayon vecteur $\mathbf{r}_d$ du point d'emplacement d'un dipôle de moment $\mathbf{d} = \mathbf{d}\,(t)$ varie dans le temps suivant une loi donnée $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_d\,(t)$. Déterminer la distribution de densités volumiques de charge et de courant dans l'espace. Calculer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant trouvé.

259. Un dipôle ponctuel de moment **d** tourne suivant une circonférence de rayon R avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$. La circonférence se situe dans le plan XY et son centre est confondu avec l'origine des coordonnées. Le vecteur **d** est constant en module et dirigé suivant la tangente à la circonférence dans le sens de rotation de l'axe des X vers l'axe des Y. Déterminer le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire du système.

260. Une particule de masse m et de charge e est animée d'un mouvement elliptique dans un champ de potentiel coulombien α/r où $\alpha < 0$. L'énergie totale et le moment cinétique de la particule sont $\mathscr{E}$ et **M** respectivement. L'origine des coordonnées cartésiennes est placée au centre du champ de force et l'axe des X est dirigé le long du demi-grand axe de la trajectoire elliptique située dans le plan XY. Calculer la moyenne temporelle sur une période des composantes du tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire de la charge en mouvement.

261. Dans le modèle de l'atome d'hydrogène proposé par Rutherford, l'électron de masse m et de charge e tourne sur une orbite elliptique. Son énergie est $\mathscr{E}$ et son moment cinétique **M**. Le demi-grand axe a de l'ellipse coïncide avec l'axe des X et l'orbite se situe dans le plan XY. Déterminer la moyenne temporelle sur une période de mouvement de l'intensité du champ électrique quasi stationnaire à grande distance $r \gg a$ de l'atome compte tenu du moment électrique quadrupolaire. Interpréter le résultat obtenu dans le cas limite où l'ellipse se transforme en une circonférence.

§ 4. Ondes électromagnétiques

262. Le potentiel vecteur d'une onde plane polarisée rectilignement est de la forme $\mathbf{A} = \mathbf{1}F\,(\omega t - \mathbf{kr})$, où $\omega = kc$, **1** un vecteur constant et F une fonction dérivable de son argument. On suppose que le potentiel scalaire est identiquement nul et div $\mathbf{A} = 0$. Calculer le vecteur de Poynting **s** et la densité d'énergie w de l'onde électromagnétique.

263. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur h, au repos, disposé perpendiculairement à la direction de propagation d'une onde électromagnétique monochromatique plane dont le potentiel vecteur est $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos\,(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$. La longueur de cette onde est petite

par rapport à R et h si bien qu'une région d'ombre s'étend derrière le cylindre. Sur la surface du cylindre, l'onde électromagnétique subit une absorption totale. Calculer la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ de la force subie par le cylindre.

264. Une onde électromagnétique plane monochromatique décrite par son potentiel vecteur $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ tombe sur la surface d'une sphère immobile de rayon R et se réfléchit en totalité sur cette surface. Sa longueur est petite par rapport à R de sorte que l'espace situé derrière la sphère est une région d'ombre. Calculer la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ de la force $\mathbf{F}$ subie par la sphère.

265. En notation complexe, une onde polarisée rectilignement et une onde polarisée circulairement s'écrivent:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{l}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}), \quad \mathbf{E} = \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}),$$

où $\lambda = 1, 2$, C_0 une constante complexe, $\mathbf{l}^{(\lambda)}$ et $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ sont des vecteurs unités polarisation qui satisfont aux conditions

$$\mathbf{l}^{(1)}\mathbf{l}^{(2)} = 0, \quad (\mathbf{l}^{(\lambda)})^2 = 1, \quad \mathbf{l}^{(\lambda)} = \mathbf{l}^{(\lambda)*},$$
$$\mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} = 1, \quad (\mathbf{b}^{(\lambda)})^2 = 0, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)*},$$

où λ indique deux états indépendants de la polarisation de l'onde, correspondant à un seul et même vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Démontrer que pour les ondes polarisées rectilignement et circulairement sont valables les règles de sommation suivantes:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} (\mathbf{A}\mathbf{l}^{(\lambda)})(\mathbf{B}\mathbf{l}^{(\lambda)}) = \mathbf{AB} - \frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})(\mathbf{Bk}),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2} (\mathbf{A}\mathbf{b}^{(\lambda)})(\mathbf{B}\mathbf{b}^{(\lambda)})^* = \mathbf{AB}^* - \frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})(\mathbf{B}^*\mathbf{k}),$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des vecteurs complexes arbitraires.

266. Soient $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1)$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$ deux ondes monochromatiques dont les polarisations sont orthogonales. En supposant que les amplitudes de ces ondes sont identiques, déterminer la polarisation de l'onde résultante.

267. Soient deux ondes monochromatiques polarisées circulairement dans des sens opposés et se propageant dans le même sens. Déterminer l'onde résultante si les amplitudes et les fréquences de ces ondes sont les mêmes et leur déphasage a une valeur constante.

268. Soient A et B les amplitudes de deux ondes ayant des polarisations circulaires de sens contraire. Déterminer la polarisation de l'onde résultante si les fréquences et les phases de ces ondes sont les mêmes.

269. Les plans de polarisation de deux ondes monochromatiques

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos (\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos (\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$$

sont inclinés sous un certain angle l'un par rapport à l'autre. Déterminer la polarisation de l'onde résultante si $E_{01} = E_{02}$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$.

270. Une onde électromagnétique est obtenue par superposition de deux ondes monochromatiques polarisées rectilignement dans deux sens orthogonaux $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos (\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos (\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})$, dont les amplitudes sont égales, les vecteurs d'onde parallèles et les fréquences diffèrent d'une petite quantité $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$. Les vecteurs $\mathbf{E}_{01}$, $\mathbf{E}_{02}$ et $\mathbf{k}$ forment un trièdre direct. Déterminer la polarisation de l'onde résultante.

271. Soient deux ondes monochromatiques de même amplitude ayant des polarisations circulaires de sens contraire et se propageant dans le même sens. Les fréquences ω_1 et ω_2 de ces ondes diffèrent l'une de l'autre d'une petite quantité $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$. Déterminer la polarisation de l'onde résultante.

272. Un paquet d'ondes est obtenu par superposition d'ondes monochromatiques $\mathbf{1} E_0 \cos (\omega t - \mathbf{kr})$ de fréquences comprises dans l'intervalle $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$. Le sens de propagation et le vecteur polarisation $\mathbf{1}$ de ces ondes sont les mêmes et le nombre des ondes dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$ est égal à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{-(\omega/\Delta)^2} d\omega,$$

où Δ est une constante indépendante de la fréquence. L'expression mise en facteur de la différentielle $d\omega$ est la fonction de répartition en fréquence des ondes monochromatiques données. Déterminer l'intensité du champ électrique du paquet d'ondes en tant que fonction des coordonnées et du temps.

273. Un paquet d'ondes est obtenu par superposition d'ondes monochromatiques $\mathbf{1} E_0 \cos (\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ de fréquences comprises dans l'intervalle de $\omega_0 - \Delta$ à $\omega_0 + \Delta$, où $\Delta \ll \omega_0$. Le sens de propagation et le vecteur polarisation $\mathbf{1}$ de ces ondes sont les mêmes alors que l'amplitude d'un groupe d'ondes de fréquences situées dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$ est égale à $\frac{E_0}{2\omega_0} d\omega$ où E_0, ω_0 et Δ sont des constantes indépendantes de la fréquence ω. Déterminer l'intensité du champ électrique du paquet d'onde comme fonction des coordonnées et du temps.

274. L'intensité du champ électrique d'un paquet d'onde est de sens constant et se décrit par la fonction $\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)$ qui est non nulle pour une région finie de variation de son argument. Ici, $\mathbf{n}$ est un vecteur unité constant et c la vitesse de la lumière.

En développant cette fonction en intégrale de Fourier, représenter le paquet d'ondes comme superposition d'ondes monochromatiques.

275. Soit une onde électromagnétique dont l'intensité du champ électrique est donnée

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\tau}\left|t-\frac{\mathbf{nr}}{c}\right|},$$

où les vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{n}$ et la grandeur τ sont constants, de plus $\tau > 0$. Déterminer la composante de Fourier $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ de cette fonction.

276. La composante de Fourier $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ de l'intensité d'un champ électrique est de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 \frac{(2\pi)^4}{\omega_0} \delta\left(\mathbf{k} - \frac{\omega\mathbf{n}}{c}\right) e^{-(\omega/\omega_0)^2},$$

où $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{n}$ sont des vecteurs constants. Déterminer l'intensité de ce champ électrique en tant que fonction des coordonnées et du temps.

277. Un champ électrostatique se décrit par un potentiel à symétrie sphérique $\varphi = \frac{e}{r} e^{-\varkappa r}$ où $\varkappa$ est une constante positive. Représenter l'intensité $\mathbf{E}$ de ce champ sous la forme du développement

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k}$$

suivant les ondes longitudinales $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$ dont les vecteurs polarisation sont orientés le long de $\mathbf{k}$.

278. Soient deux surfaces coniques introduites l'une dans l'autre et ayant un sommet commun et un axe de symétrie commun. La surface conique extérieure est parcourue par une onde de courant $J = J_0 \cos(\omega t + kr)$ qui se propage vers le sommet, passe ensuite sur la surface conique intérieure et s'en va vers l'infini. Ici, J est le courant superficiel total, $\omega = kc$ et r la distance au sommet du point d'observation sur la surface conique extérieure. Déterminer le champ électromagnétique rotationnel produit dans l'espace entre les surfaces coniques. Poser que la composante radiale du vecteur $\mathbf{E}$ cherché est identiquement nulle et le sens positif de circulation du courant coïncide avec le sens de propagation de l'onde.

279. Soit une surface cylindrique indéfinie de rayon R dont l'axe est parcouru par un courant filiforme $J = J_0 \cos(\omega t - kz)$. Le courant superficiel total traversant la surface cylindrique elle-même représente une onde de retour de la forme $J = -J_0 \cos(\omega t + kz)$. Déterminer le champ électromagnétique rotationnel à l'intérieur et à l'extérieur de la surface cylindrique. Poser que le vecteur $\mathbf{E}$ cherché est perpendiculaire à l'axe des Z et $\omega = kc$. Le sens positif de circulation du courant coïncide avec le sens de l'axe des Z qui est confondu avec l'axe de la surface cylindrique.

§ 5. Diffraction

280. Une onde électromagnétique dont l'intensité du champ électrique $\mathbf{E} = \mathbf{1}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ tombe suivant la normale à la surface d'un écran plan présentant une fente indéfinie de largeur $2a$. Le vecteur polarisation $\mathbf{1}$ est parallèle à la fente. En admettant que l'écart à l'optique géométrique est petit $ka \gg 1$, déterminer le champ électrique de l'onde diffractée se propageant sous de faibles angles de diffraction. Calculer la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité de diffusion dI par unité de longueur de cette onde dans l'intervalle d'angles $d\theta$.

281. Soit un écran plan dans lequel on a découpé N fentes indéfinies, parallèles et identiques, de largeur $2a$. La distance entre les lignes axiales de deux fentes consécutives est $2b$. Une onde électromagnétique plane $\mathbf{E} = \mathbf{1}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ tombe sur cet écran suivant la normale à sa surface. Le vecteur polarisation $\mathbf{1}$ de cette onde est parallèle aux fentes. La longueur de l'onde électromagnétique considérée est petite par rapport aux dimensions caractéristiques: $ka \gg 1$ et $kb \gg 1$, si bien que les angles de diffraction sont petits eux aussi. Déterminer le champ électrique de l'onde diffractée et l'intensité de diffusion dI de cette onde par unité de longueur dans l'intervalle d'angles $d\theta$, en prenant sa moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega$.

282. Soit un écran plan présentant un orifice rectangulaire de côtés $2a$ et $2b$. Une onde électromagnétique monochromatique plane de fréquence $\omega = kc$ tombe sur cet écran suivant la normale à sa surface. Le vecteur polarisation de cette onde est parallèle à l'un des côtés de l'orifice rectangulaire et la longueur d'onde est petite par rapport aux dimensions caractéristiques: $ka \gg 1$ et $kb \gg 1$. Déterminer l'intensité dI de l'onde diffractée dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation de l'onde.

283. Une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement de fréquence $\omega = kc$ tombe sur un écran indéfini présentant un orifice circulaire de rayon R, suivant la normale à sa surface. La longueur de cette onde est petite par rapport au rayon de l'orifice: $kR \gg 1$, de sorte que les angles de diffraction sont aussi petits. Déterminer l'intensité dI de l'onde diffractée dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne sur une période d'oscillation de l'onde.

284. Soit un écran plan présentant un orifice annulaire de rayons R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$. Déterminer la moyenne temporelle, sur une période d'oscillation, de l'intensité dI de l'onde diffractée dans l'angle solide $d\Omega$ quand une onde électromagnétique polarisée rectilignement tombe sur l'orifice annulaire suivant la normale à sa surface. La longueur de l'onde incidente est petite par rapport aux rayons de l'orifice et les angles de diffraction sont aussi petits.

285. Soit un écran plan présentant un orifice elliptique de demi-axes a et b. Une onde électromagnétique plane de fréquence $\omega = kc$ tombe sur ce plan normalement à sa surface. La longueur de cette onde est petite par rapport aux demi-axes de l'orifice elliptique: $ka \gg 1$ et $kb \gg 1$. Déterminer l'intensité dI de l'onde diffractée dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne sur une période d'oscillation de l'onde.

286. Déterminer la moyenne temporelle sur une période d'oscillation de l'intensité dI de la lumière diffractée dans l'intervalle d'angles $d\theta$ dans le cas de l'incidence normale d'une onde électromagnétique plane de fréquence $\omega = kc$ sur une plaque infiniment longue de largeur $2a$. Le vecteur polarisation de l'onde incidente est parallèle à la plaque et la longueur d'onde est petite par rapport à la largeur de la plaque: $ka \gg 1$.

287. Soit une sphère de rayon R représentant un corps noir et placé dans le champ électromagnétique d'une onde plane polarisée rectilignement de fréquence $\omega = kc$. La longueur de l'onde électromagnétique est petite par rapport au rayon de la sphère: $kR \gg 1$. Déterminer la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ de l'intensité dI de l'onde diffractée dans l'angle solide $d\Omega$.

CHAPITRE IV

RAYONNEMENT DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR LES CHARGES EN MOUVEMENT LENT

Le problème du rayonnement des ondes électromagnétiques se résout commodément si l'on introduit les potentiels électromagnétiques **A** et φ qui sont définis par les relations

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad \text{(IV.2)}$$

Les grandeurs **A** et φ ne sont pas définies de façon univoque. Le passage des potentiels électromagnétiques **A** et φ à de nouveaux potentiels **A'** et φ' à l'aide du changement d'état pris pour origine

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \text{(IV.4)}$$

laisse inchangées les intensités des champs électrique et magnétique. Ici, $f = f(\mathbf{r}, t)$ est une fonction arbitraire. Elle est généralement choisie de façon que soit satisfaite la condition de Lorentz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \qquad \text{(IV.5)}$$

Alors, les équations pour les potentiels électromagnétiques, qui découlent des équations de Maxwell prennent une forme simple:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \qquad \text{(IV.6)}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \qquad \text{(IV.7)}$$

et portent le nom d'équations d'Alembert. Seules les solutions des équations d'Alembert qui satisfont à la condition de Lorentz (IV.5) ont un sens physique.

Le rayonnement des ondes électromagnétiques est décrit par les solutions des équations (IV.6) et (IV.7) sous forme des potentiels

retardés

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV, \qquad (IV.8)$$

$$\varphi(\mathbf{r},\ t)=\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \qquad (IV.9)$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point d'observation, $\mathbf{r}'$ le rayon vecteur de l'élément de volume dV' et t l'instant d'observation.

A grande distance du système de charges, chaque élément suffisamment petit de surface d'une onde sphérique peut être considéré comme une onde plane dans laquelle l'intensité de champ électrique $\mathbf{E}$ et l'intensité de champ magnétique $\mathbf{H}$ sont égales en module et forment avec le sens de propagation de l'onde un trièdre direct

$$\mathbf{E}=\mathbf{H}\times\mathbf{n}. \qquad (IV.10)$$

Ainsi, pour déterminer le champ électromagnétique de rayonnement, il suffit de calculer seulement l'intensité de champ magnétique qui est liée au potentiel vecteur (IV.8) par la relation (IV.1).

Plaçons l'origine des coordonnées au centre d'un système de charges dont la dimension linéaire maximale sera désignée par l. A grande distance $r \gg l \geqslant r'$ on a $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r-\mathbf{nr}'$ et le potentiel vecteur (IV.8) aura pour expression approchée

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{cr}\int\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',\ t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{nr}'}{c}\right)dV', \qquad (IV.11)$$

où $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Supposons ensuite que le rayonnement soit émis essentiellement sur la fréquence ω et que la longueur de l'onde émise (divisée par 2π) soit grande par rapport à la dimension linéaire de la source de rayonnement : $\lambda\!\!\!^{-}=\frac{c}{\omega}\gg l$. En outre, le champ électromagnétique sera étudié à grande distance de la source, dans la zone d'onde

$$r\gg\lambda\!\!\!^{-}\gg l.$$

Sous ces hypothèses, l'expression se trouvant sous le signe somme dans (IV.11) peut être développée en série suivant la variable $\frac{\mathbf{nr}'}{c}$, ce qui correspond au développement du potentiel vecteur en série suivant le petit paramètre $l/\lambda\!\!\!^{-}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr}+\frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{n}}{cr}+\frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2r} \qquad (IV.12)$$

où le vecteur $\mathbf{D}$ possède les composantes

$$D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta.$$

Dans la formule (IV.12), les deuxième et troisième termes sont numériquement du même ordre de grandeur, alors que leur somme est inférieure au premier terme dans le rapport l/λ. Les termes d'ordre de petitesse plus élevé sont rejetés. Le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$, le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et le tenseur $D_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire dépendent du temps, compte tenu du retard

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}\left(t-\frac{r}{c}\right), \quad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}\left(t-\frac{r}{c}\right), \quad D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta}\left(t-\frac{r}{c}\right). \quad \text{(IV.13)}$$

Appliquée à une charge animée d'un mouvement non uniforme avec une vitesse non relativiste $\mathbf{v}$, la somme (IV.12) représente un développement suivant le paramètre $\frac{v}{c} \ll 1$.

En calculant le rotationnel de l'expression (IV.12) et en rejetant les petits termes proportionnels à $1/r^2$, on obtient l'intensité de champ magnétique de l'onde émise

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\ t)=\frac{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{c^2r}+\frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{c^2r}+\frac{\dddot{\mathbf{D}}\times\mathbf{n}}{6c^3r}. \quad \text{(IV.14)}$$

En tout point de la zone d'onde, le flux de l'énergie électromagnétique est déterminé par le vecteur de Poynting

$$\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{cH^2}{4\pi}\mathbf{n}. \quad \text{(IV.15)}$$

L'énergie électromagnétique I émise par la source en unité de temps (intensité de rayonnement) est égale au flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de grand rayon r et de centre à l'origine des coordonnées

$$I=\frac{c}{4\pi}\int H^2r^2\,d\Omega, \quad \text{(IV.16)}$$

où $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ est l'élément d'angle solide.

En se servant des formules (IV.14) et (IV.16), on obtient aisément, pour l'intensité de rayonnement I, l'expression suivante

$$I=\frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}+\frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3}+\frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} \quad \text{(IV.17)}$$

Les premier, deuxième et troisième termes représentent respectivement les intensités de rayonnement dipolaire électrique, dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique. Les termes qui décrivent le rayonnement des moments multipolaires d'ordre plus élevé sont rejetés. En gardant les termes indiqués, on obtient une série infinie rapidement convergente dont les termes dépendent, dans le cas général, du choix de l'origine des coordonnées. C'est pourquoi il faut préciser le système de coordonnées dans lequel sont définis le moment dipolaire électrique, le moment dipolaire magnétique

et le moment quadrupolaire électrique intervenant dans la formule (IV.17). L'origine des coordonnées est généralement choisie en un point physique déterminé du système chargé, par exemple au centre d'inertie ou au centre de symétrie, ainsi qu'au centre de rotation des charges.

Puisque l'intensité de rayonnement totale (IV.16) s'exprime par le flux d'énergie électromagnétique à travers une sphère de grand rayon r et de centre à l'origine des coordonnées, la valeur numérique de cette grandeur varie lors d'un changement d'origine des coordonnées, parce que la sphère indiquée change de position par rapport au système rayonnant. Cependant l'énergie émise totale

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I\,dt \tag{IV.18}$$

ne dépend pas du changement d'origine des coordonnées à l'intérieur du système rayonnant.

Généralement, d'après l'ordre de grandeur, le module des vecteurs $\boldsymbol{\mu}$ et $\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}$ est $l/\lambda\!\!\!^{-}$ (ou v/c) fois plus petit que $|\mathbf{d}|$. Dans ces conditions, les deuxième et troisième termes de la formule (IV.14) n'apportent que de petites corrections au calcul de l'intensité de champ magnétique dans la zone d'onde. Pourtant, dans la formule (IV.17), les deuxième et troisième termes doivent être dans ce cas omis pour ne pas dépasser la précision imposée du calcul. Pour déterminer la première correction à apporter au rayonnement dipolaire électrique, il faut calculer le champ magnétique avec une grande précision en gardant dans la formule (IV.14) le terme rejeté d'ordre l^2/c^2 (ou v^2/c^2). Alors, à la somme (IV.17) s'ajoutera encore un terme qui est égal, d'après l'ordre de grandeur, aux intensités des rayonnements dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique (voir les problèmes 349 et 350).

Si, pour une cause quelconque, le rayonnement dipolaire électrique d'un système se trouve affaibli et est, d'après l'ordre de grandeur, nettement inférieur au rayonnement dipolaire magnétique et au rayonnement quadrupolaire électrique, les deuxième et troisième termes dans la formule (IV.17) deviennent termes principaux et, conjointement avec le premier terme, décrivent avec une précision déterminée le rayonnement du système. Les termes omis représentent de petites corrections d'ordre plus élevé. Cette dernière assertion est, généralement parlant, aussi valable dans le cas où tous les trois termes de (IV.17) sont du même ordre de grandeur. Certains termes de la somme (IV.17) peuvent s'annuler.

L'énergie totale (IV.18), émise pendant toute la durée de fonctionnement de la source peut être représentée par la somme des

énergies émises sur les différentes fréquences

$$\mathscr{E} = \int_0^\infty \mathscr{E}(\omega)\, d\omega, \qquad \text{(IV.19)}$$

où $\mathscr{E}(\omega)$ est la densité spectrale de rayonnement, c'est-à-dire l'énergie par intervalle de fréquence unité. Elle caractérise la composition spectrale du rayonnement.

Pour déterminer la densité spectrale $\mathscr{E}(\omega)$ de rayonnement d'une source donnée, il faut développer en série de Fourier les grandeurs intervenant dans l'expression de (IV.17) l'intensité de rayonnement. Alors, l'énergie $d\mathscr{E}_\omega = \mathscr{E}(\omega)\, d\omega$ émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ s'écrira sous la forme *)

$$d\mathscr{E}_\omega = \left(\frac{2\,|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2\,|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5} \right) d\omega, \qquad \text{(IV.20)}$$

où $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)$ et $\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)$ sont les composantes de Fourier des grandeurs correspondantes $\ddot{\mathbf{d}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(t)$ et $\dddot{D}_{\alpha\beta}(t)$ alors que l'expression entre parenthèses représente la fonction cherchée $\mathscr{E}(\omega)$.

Par exemple, l'énergie émise aux fréquences faibles $\omega\tau \ll 1$ par une charge e dans un champ de force extérieur a pour grandeur

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2}{3\pi c^3}\, d\omega.$$

Ici, τ est l'ordre de grandeur du temps d'interaction de la charge avec le champ extérieur et $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses de la charge avant et après l'interaction.

Soient $\mathbf{E}(t)$ et $\mathbf{H}(t)$ les intensités des champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique plane se propageant dans la direction $\mathbf{n}$, déterminées en un certain point de la zone d'onde. Dans ce cas, l'énergie $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega)$ passant dans le sens normal à travers une unité de surface dans un intervalle de fréquence unitaire est donnée par la formule

$$\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega) = \frac{c\,|\mathbf{E}(\omega)|^2}{4\pi^2} = \frac{c\,|\mathbf{H}(\omega)|^2}{4\pi^2} \qquad \text{(IV.21)}$$

dans laquelle $\mathbf{E}(\omega)$ et $\mathbf{H}(\omega)$ sont les composantes de Fourier des grandeurs indiquées $\mathbf{E}(t)$ et $\mathbf{H}(t)$. Le graphique de la fonction $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega)$ représente la ligne spectrale du rayonnement donné se propageant dans le sens $\mathbf{n}$. Le contour de la ligne spectrale a généralement une

---

*) Entre les composantes de Fourier $f(\omega)$ et $\dot{f}(\omega)$ de la fonction $f(t)$ et de sa dérivée $\dot{f}(t)$ il existe la relation $\dot{f}(\omega) = -i\omega f(\omega)$. De façon analogue, $\ddot{f}(\omega) = -\omega^2 f(\omega)$ et $\dddot{f}(\omega) = i\omega^3 f(\omega)$.

forme en cloche et présente le maximum principal sur une certaine fréquence ω_0. Pour caractériser la composition spectrale d'un rayonnement, on introduit la notion de largeur $\Delta\omega$ de la ligne spectrale en la définissant de la manière suivante. On appelle demi-largeur $\Delta\omega/2$ de la ligne spectrale la valeur du module d'une différence $|\omega - \omega_0|$, pour laquelle la fonction $\mathcal{E}_n(\omega)$ devient deux fois plus faible que sa valeur maximale $\mathcal{E}_n(\omega_0)$. Dans le cas d'une source concrète d'ondes électromagnétiques, la quantité $\mathcal{E}_n(\omega)$ diffère de la densité spectrale de rayonnement $\mathcal{E}(\omega)$ introduite plus haut, par un certain facteur qui dépend de la distance r à la source ainsi que du sens **n**. C'est pourquoi la largeur de la ligne spectrale peut également être déterminée à l'aide de $\mathcal{E}(\omega)$.

On appelle intensité dI de rayonnement émis dans un élément $d\Omega$ d'angle solide l'énergie qui traverse par unité de temps un élément $dS = r^2 d\Omega$ d'une surface sphérique de grand rayon r dont le centre est situé à l'origine des coordonnées. En calculant le flux du vecteur de Poynting (IV.15) à travers cet élément de surface sphérique, on trouve la répartition angulaire de l'intensité de rayonnement

$$dI = \frac{cH^2r^2}{4\pi} d\Omega \tag{IV.22}$$

où l'intensité de champ magnétique est donnée par l'expression (IV.14). Si le rayonnement dipolaire électrique n'est pas affaibli, il convient, après avoir élevé au carré la somme (IV.14), d'omettre les termes ayant l'ordre de grandeur de l^2/λ^2 (ou v^2/c^2) pour ne pas dépasser la précision adoptée pour le calcul.

La formule (IV.22) se simplifie notablement lorsque le système rayonnant se caractérise par un moment électrique dipolaire seul ou par un moment magnétique seul ou enfin par un tenseur de moment électrique quadrupolaire seul et prend respectivement la forme:

$$dI_d = \frac{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \tag{IV.23}$$

$$dI_\mu = \frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \tag{IV.24}$$

$$dI_D = \frac{(\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})^2}{144\pi c^5} d\Omega. \tag{IV.25}$$

Dans ces formules, les composantes du vecteur unité **n** sont liées aux angles polaire et azimutal θ et ψ de la direction de propagation par les relations suivantes

$$n_x = \sin\theta\cos\psi, \quad n_y = \sin\theta\sin\psi, \quad n_z = \cos\theta.$$

La répartition angulaire de l'énergie totale émise pendant la durée de fonctionnement de la source est obtenue en intégrant l'inten-

sité de rayonnement (IV.22) par rapport au temps

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{cr^2}{4\pi}\, d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\mathbf{r}, t)\, dt. \qquad \text{(IV.26)}$$

En développant en intégrale de Fourier, par rapport à la variable t, l'intensité de champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ intervenant dans cette formule il n'est pas difficile de déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}$ rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$ sur les fréquences comprises dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2}\, |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2\, d\Omega\, d\omega. \qquad \text{(IV.27)}$$

En se servant de la formule (IV.14), on représente la composante de Fourier $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ de l'intensité de champ magnétique intervenant dans (IV.27) par une somme des termes relatifs aux rayonnements dipolaire électrique, dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique. Pourtant, après avoir élevé cette somme au carré, il faut rejeter les termes d'ordre de grandeur de l^2/c^2 (ou v^2/c^2), si le rayonnement dipolaire électrique n'est pas affaibli.

Lorsqu'un électron se trouve dans le champ d'une onde électromagnétique, il est soumis, dans le cas non relativiste, à une force $e\mathbf{E}$. Le terme $\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ peut être négligé. Sous l'action de cette force, l'électron acquiert une accélération $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$ et donc émet un rayonnement *). La répartition angulaire du rayonnement dipolaire électrique d'un électron animé d'un mouvement oscillant dans le champ d'une onde électromagnétique monochromatique est déterminée par la formule (IV.23). Par suite d'un tel rayonnement, l'onde incidente subira une diffusion sur l'électron libre. Ce phénomène se caractérise par la section différentielle de diffusion $d\sigma$ dans un angle solide $d\Omega$:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\bar{s}}, \qquad \text{(IV.28)}$$

où s est le module du vecteur de Poynting de l'onde incidente et le trait au-dessus des lettres désigne la moyenne temporelle sur une période d'oscillation de cette onde.

Une particule chargée rayonnante est soumise de la part du champ électromagnétique rayonné à une force que l'on appelle force de frottement de rayonnement (on lui donne également le nom de résistance de rayonnement). Dans ces conditions, on peut considérer

*) Dans le présent ouvrage on admet partout que le mouvement des microparticules se décrit avec une précision suffisante par les lois de la mécanique classique. Une description complète du mouvement des microparticules et de leur interaction avec le champ électromagnétique est donnée par la théorie quantique.

que l'énergie perdue par la particule pour le rayonnement est utilisée justement pour surmonter la force de frottement qui apparaît au cours du rayonnement. Dans le cas non relativiste, la force de frottement de rayonnement est de la forme

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{r}} \tag{IV.29}$$

où e et $\mathbf{r}$ sont la charge et le rayon vecteur de la particule en mouvement. Cette force est petite par rapport à la force extérieure qui s'exerce sur la particule.

L'influence réciproque du rayonnement sur le mouvement de la particule chargée doit être prise en compte lorsque le rayonnement se fait avec une grande intensité et durant un intervalle de temps très long (infini). On peut le faire par deux méthodes différentes. La première consiste à ajouter la force de frottement de rayonnement (IV.29) à la force extérieure $\mathbf{F}$ dans l'équation du mouvement

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{r}}. \tag{IV.30}$$

Dans ce cas, l'intensité, la composition spectrale et la répartition angulaire du rayonnement sont calculées au moyen des formules (IV.16) à (IV.27) dans lesquelles la fonction $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ est solution de l'équation (IV.30).

La seconde méthode est basée sur le principe de la conservation de l'énergie selon lequel l'énergie $\mathscr{E}$ cédée par une particule chargée dans un champ de force constant extérieur $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ est due au rayonnement

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = I, \tag{IV.31}$$

où la quantité $\mathscr{E}$ vaut la somme des énergies cinétique et potentielle de la particule alors que l'intensité de rayonnement I est donnée par la formule (IV.17). L'équation (IV.31) n'est valable qu'en première approximation non nulle (sans tenir compte des effets liés au retard du signal électromagnétique rayonné à l'intérieur de la région de mouvement de la charge). A la différence du cas précédent, le rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de la particule chargée, intervenant dans l'expression de l'intensité de rayonnement, est pris ici de l'équation du mouvement

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{IV.32}$$

sans tenir compte de la force de frottement de rayonnement. Cette dernière n'apporte dans la relation (IV.31) qu'une correction négligeable. L'équation du mouvement (IV.32) permet d'exprimer le second membre de l'égalité (IV.31) par l'énergie $\mathscr{E}$ et donc d'obtenir

une équation différentielle par rapport à cette grandeur. L'équation différentielle ainsi obtenue décrit la diminution de l'énergie de la particule par suite d'un rayonnement de longue durée.

§ 1. Rayonnement dipolaire électrique

288. Une particule de masse m et de charge e a traversé un condensateur. La distance entre les armatures du condensateur est l et l'intensité **E** du champ électrique y est constante et uniforme. L'angle entre le vecteur **E** et le sens de la vitesse $\mathbf{v}_0$ de la particule à l'entrée dans le condensateur était α. Le signe de la charge e est le même que celui du cosinus de l'angle α. Calculer l'énergie $\mathcal{E}$ perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique au cours du passage par le condensateur.

289. Une particule de masse m et de charge e traverse une sphère de diamètre R à l'intérieur de laquelle est uniformément répartie une charge Q. Les charges de la particule et de la sphère sont de signes contraires. Avant d'entrer dans la sphère la particule possédait une énergie cinétique $\mathcal{E}_0$. Déterminer l'énergie $\mathcal{E}$ perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique à la traversée de la sphère.

290. Soit un demi-espace où règne un champ magnétique constant et uniforme d'intensité **H** dirigée parallèlement au plan limite. Un proton de masse m et de charge e pénètre dans ce demi-espace. A l'entrée, la vitesse **v** du proton est perpendiculaire au plan limite. Evaluer l'énergie $\mathcal{E}$ perdue par le proton pour le rayonnement dipolaire électrique au cours du mouvement dans le champ magnétique.

291. Un proton de masse m et de charge e se déplace dans des champs électrique et magnétique croisés dont les intensités **E** et **H** satisfont aux conditions $\mathbf{EH} = 0$ et $E \ll H$. Les champs extérieurs sont constants et uniformes. La vitesse du proton à l'instant initial $t_0 = 0$ est $\mathbf{v}_0$. Déterminer l'énergie de rayonnement dipolaire électrique perdue par la particule pendant le temps t.

292. Soit une antenne linéaire ou filaire qui représente, dans sa forme la plus simple, un fil mince rectiligne de longueur l parcouru par un courant $J = J_0 \cos \omega t$. Déterminer l'intensité I de rayonnement « ondes longues » (lorsque la longueur d'onde émise est très grande devant la longueur de l'antenne) de cette antenne en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation du courant.

293. Sous l'action d'une force élastique, une particule de masse m et de charge e peut effectuer des oscillations harmoniques de fréquence ω_0 (système dit oscillateur). En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, déterminer la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ de l'intensité I de rayonnement de l'oscillateur qui effectue des oscillations forcées établies dans un champ électrique extérieur d'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$.

294. Un électron de masse m et de charge e passe à une grande distance l d'un noyau dont la charge est $Z\,|\,e\,|$. A l'instant de temps infiniment éloigné $t = -\infty$, l'électron avait une vitesse égale en valeur absolue à v_0. En négligeant la courbure de sa trajectoire, calculer l'énergie $\mathscr{E}$ perdue par l'électron pour le rayonnement dipolaire électrique au cours de son trajet.

295. Une particule de masse m et de charge e passe à une grande distance l d'un dipôle électrique de moment $\mathbf{d}$ qui se trouve à l'état de repos en un certain point de l'espace. A l'infini, la particule était animée d'une vitesse $\mathbf{v}_0$. En admettant, de façon approchée, que la trajectoire est rectiligne, déterminer l'énergie totale $\mathscr{E}$ perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique en deux cas: a) le moment dipolaire $\mathbf{d}$ est parallèle à la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ de la particule; b) le moment dipolaire $\mathbf{d}$ est perpendiculaire à la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ et se situe dans le plan de mouvement de la particule.

296. Soit un atome excité au repos dont la charge totale et le moment électrique dipolaire sont nuls, alors que les composantes du tenseur de moment électrique quadrupolaire sont de la forme $D_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$ et $D_{11} = D_{22} = -{}^1/_2 D$. Un électron de masse m et de charge e passe dans le plan XY à une grande distance l de l'atome. A un instant de temps infiniment éloigné $t = -\infty$, il avait une vitesse égale en valeur absolue à v_0. En considérant que la trajectoire de l'électron est approximativement rectiligne et en négligeant la polarisation de l'atome sous l'effet de l'électron passant, déterminer l'énergie totale $\mathscr{E}$ perdue par l'électron pour le rayonnement.

297. Soient deux fragments du noyau de nombres de masse A_1 et A_2 et de charges Z_1e et Z_2e obtenus par suite de la désintégration d'un noyau d'atome. Dans le système du centre d'inertie, l'énergie cinétique totale des deux fragments à l'infini est égale à $\mathscr{E}_0$. La masse du nucléon est m. Calculer l'énergie totale $\mathscr{E}$ du rayonnement dipolaire électrique dû à l'interaction coulombienne des fragments du noyau qui s'éloignent l'un de l'autre. Admettre que les fragments se meuvent suivant les lois de la mécanique classique et commencent leur mouvement à partir des points de l'espace où leur vitesse relative était nulle.

298. Un proton de masse m et de charge e se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme d'intensité constante H. A l'instant initial $t_0 = 0$ son énergie cinétique était $\mathscr{E}_0$. Donner la loi de décroissance de l'énergie cinétique $\mathscr{E}$ du proton due au rayonnement dipolaire électrique.

299. Soit une particule de masse m et de charge e effectuant dans un champ de potentiel extérieur une oscillation harmonique à une dimension avec une fréquence ω. A l'instant initial $t_0 = 0$ son énergie totale était $\mathscr{E}_0$. Sans recourir à l'expression explicite pour la force de frottement de rayonnement, donner la loi de décroissance,

prise en valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$, de l'énergie totale $\mathscr{E}$ de la particule par suite du rayonnement dipolaire électrique. Admettre qu'à tout instant l'écart au régime d'oscillation harmonique est négligeable: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} \ll \omega\mathscr{E}$. Aussi, en prenant la moyenne, peut-on considérer comme constantes les fonctions lentement variables en fonction du temps.

300. Dans le modèle classique de l'atome, proposé par Rutherford, un électron de masse e gravite sur une orbite circulaire autour d'un noyau fixe de charge $Z \mid e \mid$. Donner la loi de décroissance de l'énergie totale $\mathscr{E}$ de l'électron par suite du rayonnement dipolaire électrique. Calculer le temps t_{ch} au bout duquel l'électron tombera sur le noyau par suite de la perte d'énergie par le rayonnement dipolaire électrique. A l'instant initial $t_0 = 0$ l'électron se trouvait à une distance R du noyau.

301. Le modèle de l'atome d'hydrogène proposé par J. J. Thomson représente une sphère fixe de rayon R, uniformément chargée, dont la charge positive totale est $\mid e \mid$. A l'intérieur de cette sphère se déplace un électron ponctuel de masse m et de charge e. Quelle est la fréquence ω de l'onde électromagnétique émise par un tel système? En supposant qu'à l'instant initial $t_0 = 0$ l'électron était au repos à une distance R du centre de la sphère, donner la loi de décroissance, prise en valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$, de l'énergie totale $\mathscr{E}$ de l'électron due à la force de frottement de rayonnement. En prenant la moyenne, considérer comme constantes les fonctions lentement variables dans le temps.

302. Démontrer qu'un système fermé de particules chargées caractérisées par un même rapport de la charge à la masse n'émet aucun rayonnement dipolaire électrique.

303. Soit un gaz électronique de densité N_0 soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur d'intensité uniforme et constante **H**. La distribution des énergies cinétiques du mouvement de translation des électrons se décrit par une distribution de Maxwell et la distance moyenne entre les électrons est grande par rapport à la longueur de l'onde émise. Déterminer l'intensité I de rayonnement par unité de volume du gaz électronique due au champ magnétique extérieur.

304. Soient deux particules de même masse m fixées l'une à l'autre par une barre rigide de longueur l dont la masse peut être négligée. Les charges des particules sont égales en valeur absolue et de signes contraires. Les particules sont placées dans un champ électrique extérieur dont l'intensité **E** est constante, uniforme et est dirigée de la charge négative vers la charge positive. A l'instant initial $t_0 = 0$, la barre était au repos et faisait avec le vecteur **E** un petit angle $\psi_0 \ll 1$. Déterminer l'intensité I de rayonnement dipolaire électrique du système de deux charges.

305. Soient deux dipôles identiques parallèles de moment $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ séparés par une distance a qui est égale, en ordre de grandeur, à la longueur de l'onde émise $a \sim c/\omega = \lambda\!\!\!^-$. Le vecteur constant $\mathbf{d}_0$ est parallèle à la droite joignant les dipôles. Calculer la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ de l'intensité I de rayonnement du système de deux dipôles. Etudier le cas limite où $a \ll \lambda\!\!\!^-$.

306. Soit un système formé par un grand nombre N de dipôles ponctuels parallèles, qui occupe un domaine de l'espace dont les dimensions linéaires sont négligeables par rapport aux longueurs principales des ondes émises. Les fréquences d'oscillation des dipôles sont dispersées autour d'une certaine fréquence ω de façon que le moment résultant des dipôles aux fréquences comprises dans l'intervalle de $\omega + \varepsilon$ à $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$ est égal à $\mathbf{d}_0 f(\varepsilon) \cos(\omega+\varepsilon) t\, d\varepsilon$, où le vecteur $\mathbf{d}_0$ est constant et la fonction de répartition $f(\varepsilon)$ est de la forme $f(\varepsilon) = \frac{NT_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2 T_0^2}$. Les quantités T_0 et ε satisfont aux inégalités $N \gg \omega T_0 \gg 1$ et $-\infty \leqslant \varepsilon \leqslant \infty$. Déterminer l'intensité I de rayonnement du système prise en valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$ ainsi que l'énergie totale $\mathscr{E}$ de rayonnement dipolaire électrique pendant un temps infini $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$.

307. Un électron de masse m et de charge e est animé d'un mouvement elliptique à l'intérieur d'un domaine sphérique uniformément rempli de charge positive de densité volumique ρ. A l'instant initial, l'électron se trouvait en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ et possédait une vitesse $\mathbf{v}_0$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}$ perdue par l'électron pour le rayonnement dipolaire électrique pendant une période de mouvement.

308. Un électron de masse m et de charge e se déplace sur une orbite elliptique autour d'un noyau fixe de charge $Z\,|\,e\,|$. L'énergie totale et le moment cinétique de l'électron sont respectivement $\mathscr{E}$ et $\mathbf{M}$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}_d$ perdue par l'électron pour le rayonnement dipolaire électrique pendant une période de mouvement.

309. Une particule positivement chargée de masse m_1 passe avec un paramètre d'impact l près d'un noyau d'atome de masse m_2 et de charge e_2. La vitesse de la particule par rapport au noyau à une distance infiniment grande de celui-ci était $\mathbf{v}_0$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}_d$ perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique pendant tout le temps de passage près du noyau.

310. Soit une particule de masse m et de charge e qui se déplace dans un champ de potentiel $U = \alpha/r^2$, où α est une constante positive. L'énergie totale et le moment cinétique de la particule sont respectivement $\mathscr{E}$ et $\mathbf{M}$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}_d$ perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique pendant un temps de mouvement infiniment grand de $t = -\infty$ à $t = \infty$.

311. Un flux de particules identiques de masse m et de charge e est diffusé par un champ de potentiel répulsif à symétrie sphérique $U = U(r)$. La vitesse de chaque particule incidente à une distance infiniment grande du centre de force est égale à $\mathbf{v}_0$. Déterminer le rayonnement efficace

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi l \, dl,$$

où $\Delta\mathcal{E}$ est l'énergie totale du rayonnement dipolaire électrique d'une particule passant avec un paramètre d'impact l. Représenter la quantité $\varkappa$ sous forme d'intégrale double.

§ 2. Rayonnement dipolaire magnétique. Rayonnement quadrupolaire électrique

312. Un neutron possédant un moment magnétique intérieur $\boldsymbol{\mu}$ pénètre dans un champ magnétique uniforme d'intensité constante $\mathbf{H}$. Le moment cinétique intérieur $\mathbf{M}$ du neutron est lié au moment magnétique par la relation $\boldsymbol{\mu} = -\beta\mathbf{M}$ alors que l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{\mu}$ et $\mathbf{H}$ à l'entrée du neutron dans le champ était égal à θ_0. Calculer l'intensité I de rayonnement.

313. Une antenne en cadre la plus simple représente un cadre rectangulaire de côtés a et b parcouru par un courant filiforme $J = J_0 \cos \omega t$. Déterminer l'intensité I de rayonnement « ondes longues » de cette antenne, en prenant la valeur moyenne sur une période d'oscillation du courant.

314. Soit un fuseau mince fait en matériau ferromagnétique, ayant une longueur l, une masse m_l et un moment magnétique μ_l par unité de longueur. A l'instant initial le fuseau était au repos et faisait un petit angle ψ_0 avec le sens d'un champ magnétique uniforme extérieur d'intensité constante $\mathbf{H}$. Déterminer l'intensité I de rayonnement dû à l'oscillation du fuseau aimanté.

315. A quelle condition l'intensité de rayonnement dipolaire magnétique ne dépend-elle pas du choix de l'origine des coordonnées ?

316. Un électron de masse m et de charge e se déplace dans un champ électrique extérieur, uniforme et constant, d'intensité $\mathbf{E}$. Représenter l'intensité I de rayonnement dipolaire magnétique comme fonction de la vitesse $\mathbf{v}$ de l'électron et de l'intensité du champ électrique.

317. Soit une sphère de rayon R qui effectue des oscillations de torsion autour de son axe de symétrie avec une fréquence ω_0. L'angle de rotation maximal est ψ_0. La charge Q et la masse sont uniformément réparties à l'intérieur du volume de la sphère. Déterminer la moyenne temporelle, sur une période d'oscillation, de l'intensité de rayonnement de la sphère.

318. Une sphère homogène de rayon R tourne autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. L'axe de rotation fait un angle θ avec le sens d'un champ magnétique extérieur d'intensité uniforme et constante **H**. La charge totale et la masse de la sphère sont Q et m. Calculer l'intensité I de rayonnement.

319. Soit un anneau mince homogène de rayon R et de masse m, parcouru par un courant constant J. A l'instant initial l'anneau était au repos et son axe faisait un petit angle ψ_0 avec le sens d'un champ magnétique uniforme extérieur d'intensité constante **H** ($\psi_0 \ll 1$). Le courant J circule dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on regarde dans le sens du vecteur **H**. Calculer l'intensité I de rayonnement dû à l'oscillation de l'anneau.

320. Un cadre mince rectangulaire de côté l, à l'état de repos, est le siège d'un courant excité $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$. Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}$ de rayonnement « ondes longues » pendant le temps $-\infty \leqslant$ $\leqslant t \leqslant \infty$.

321. Soient deux charges identiques e animées d'un mouvement plan. Leurs coordonnées polaires r_1, ψ_1 et r_2, ψ_2 varient dans le temps suivant la loi

$$r_1 = r_2 = a\ddot{\psi}^2, \quad \psi_1 = \psi(t), \quad \psi_2 = \pi + \psi(t),$$

où a est une constante positive et $\psi(t)$ une fonction monotone comprise dans les limites $0 \leqslant \psi(t) \leqslant \pi$. Déterminer l'intensité de rayonnement dipolaire magnétique de ce système.

322. Le rayonnement dipolaire magnétique peut-il se produire dans les modèles de l'atome d'hydrogène proposés par Rutherford et J. J. Thomson (voir problèmes 300 et 301)?

323. Démontrer qu'en l'absence de champ extérieur l'intensité de rayonnement dipolaire magnétique de deux particules chargées en interaction est nulle si l'origine des coordonnées est choisie au centre d'inertie de ces particules.

324. Soit un système fermé comprenant un nombre fini de particules ayant un même rapport de la charge à la masse. Démontrer qu'un tel système n'émet aucun rayonnement dipolaire magnétique.

325. Soit un système de particules, ayant un même rapport de la charge à la masse égal à e/m, animé d'un mouvement fini dans un champ extérieur pourvu de symétrie sphérique et produit par une certaine particule au repos. L'espace considéré est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme constant de faible intensité **H**. Déterminer l'intensité $\mathbf{E}_m$ du champ électrique, l'intensité $\mathbf{H}_m$ du champ magnétique du rayonnement dipolaire magnétique dans la zone d'onde ainsi que la fréquence des ondes émises.

326. Soient deux moments magnétiques $\mu_1 = \mu_0 \cos \omega t$ et $\mu_2 =$ $= \mu_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \alpha]$ dont la distance est petite devant les longueurs des ondes émises. Les fréquences d'oscillation satisfont à la condition $\Delta\omega \ll \omega$ et les grandeurs μ_0 et α sont constantes.

Calculer l'intensité I de rayonnement de ce système, prise en valeur moyenne entre les instants t et $t + T$, où $T = 2\pi/\omega$ est la période des oscillations rapides.

327. Soit un système de N moments magnétiques occupant un domaine de l'espace dont les dimensions linéaires sont négligeables par rapport aux longueurs des ondes émises. Les moments magnétiques sont décrits par la formule $\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}_0 \cos [(\omega + n\varepsilon) t]$, où $\boldsymbol{\mu}_0$ est un vecteur constant et le nombre n prend les valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N - 1$. La dispersion des fréquences de l'oscillation est petite par rapport à la fréquence fondamentale: $\varepsilon N \ll \infty$. Déterminer l'intensité I de rayonnement du système en prenant sa valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$.

328. Soit un ensemble d'un grand nombre N de petits contours fermés parcourus par un courant variable, qui constitue un système rayonnant dont les dimensions linéaires sont très petites par rapport aux longueurs principales des ondes émises. Les moments magnétiques des contours parcourus par le courant effectuent des oscillations harmoniques. Les fréquences de la majeure partie de ces dernières diffèrent peu d'une certaine fréquence ω. Le moment magnétique résultant des contours parcourus par le courant sur des fréquences d'oscillations comprises dans l'intervalle de $\omega + \varepsilon$ à $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$ est égal à $d\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 f(\varepsilon) \cos(\omega + \varepsilon)\, t d\varepsilon$ où $\boldsymbol{\mu}_0$ est un vecteur constant et la fonction $f(\varepsilon) = \frac{N\tau}{\pi(\varepsilon^2\tau^2+1)}$ décrit la répartition des contours en fréquences d'oscillations harmoniques avec les conditions $N \gg \gg \omega t \gg 1$ et $-\infty \leqslant \varepsilon \leqslant \infty$. Déterminer l'intensité I de rayonnement du système en prenant sa valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$, calculer l'énergie totale $\mathscr{E}$ de rayonnement dipolaire magnétique pendant un temps infini $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$.

329. Quelle est la condition pour que l'intensité de rayonnement quadrupolaire électrique soit indépendante du choix de l'origine des coordonnées?

330. Soit une petite boule de masse quelconque fixée à l'extrémité inférieure d'une tige non pesante de longueur $2l$ qui peut tourner librement autour de son point milieu fixe. Les extrémités opposées de la tige portent des charges ponctuelles de grandeur e. A l'instant initial, la tige était écartée d'un petit angle ψ_0 de la position verticale et se trouvait à l'état de repos. Puis, elle effectue de petites oscillations sous l'effet de la force de pesanteur subie par la boule. Déterminer la moyenne temporelle, sur une période d'oscillation, de l'intensité de rayonnement du système.

331. Soient deux particules, caractérisées par un même rapport de la charge à la masse $e_1/m_1 = e_2/m_2 = e/m$, liées entre elles par un ressort et effectuant des oscillations harmoniques en l'absence du champ de pesanteur. La longueur du ressort non chargé est l et son coefficient de rigidité est k. A l'instant initial, le ressort était tendu

jusqu'à une longueur l_0 et se trouvait au repos. Calculer l'intensité I de rayonnement en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation du ressort. Les actions réciproques des charges sont à négliger.

332. Un noyau s'est désintégré en deux fragments de nombres de masse A_1 et A_2 et de charges Z_1e et Z_2e. Le rapport de la charge à la masse est le même pour les deux fragments $\frac{Z_1e}{A_1m}=\frac{Z_2e}{A_2m}=\frac{Ze}{Am}$, où m est la masse du nucléon et Z et A sont des nombres. Sous l'action de la répulsion coulombienne, les fragments s'éloignent vers l'infini. Dans le système du centre d'inertie, l'énergie des deux fragments est $\mathcal{E}_0$ et leurs vitesses avant la répulsion mutuelle étaient nulles. Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}$ de rayonnement produit par le mouvement des fragments.

333. Un proton de masse m et de charge e se déplace dans une direction quelconque dans un champ électrique extérieur d'intensité constante et uniforme **E**. Représenter l'intensité I de rayonnement quadrupolaire électrique en tant que fonction de la vitesse **v** du proton et de l'intensité du champ électrique extérieur.

334. Soient deux particules identiques de masse m et de charge e. Elles tournent dans un champ magnétique avec une vitesse angulaire constante ω suivant une circonférence, étant placées aux extrémités opposées du diamètre. A l'instant initial $t_0=0$, l'énergie cinétique des deux particules était $\mathcal{E}_0$. Déterminer la loi de décroissance de l'énergie cinétique $\mathcal{E}$ des particules par suite du rayonnement, en supposant que les actions mutuelles des charges peuvent être négligées. La vitesse de décroissance de l'énergie cinétique des particules est très petite $\frac{d\mathcal{E}}{dt}\ll\omega\mathcal{E}$.

335. Soient deux charges identiques de grandeur e tournant avec une vitesse angulaire constante ω suivant une circonférence de rayon R. Les rayons menés aux points d'emplacement des charges forment un angle ψ. Calculer la valeur de l'angle ψ pour laquelle l'intensité I_d de rayonnement électrique dipolaire du système de deux charges est égale à l'intensité I_D de son rayonnement quadrupolaire.

336. Soit un dipôle ponctuel de moment **d** tournant avec une vitesse angulaire constante ω suivant une circonférence de rayon R. Le vecteur **d** est constant en module et dirigé, à tout instant de temps, suivant le rayon de la circonférence. Déterminer l'intensité I_d de rayonnement dipolaire électrique, l'intensité I_μ de rayonnement dipolaire magnétique et l'intensité I_D de rayonnement quadrupolaire électrique à l'approximation « ondes longues » $R\ll\lambda=c/\omega$.

337. Deux dipôles ponctuels identiques et antiparallèles de moments **d** et —**d** tournent avec une vitesse angulaire constante ω suivant une circonférence de rayon R, étant placés aux extrémités opposées du diamètre. Les moments des dipôles sont constants en

module et, à tout instant de temps, dirigés suivant la tangente à la circonférence. Déterminer l'intensité I de rayonnement, en supposant que $R \ll \frac{c}{\omega}$.

338. Deux dipôles ponctuels antiparallèles de moments **d** et —**d**, placés à une distance $2a$ l'un de l'autre, tournent avec une vitesse angulaire constante ω dans des plans perpendiculaires à la droite commune sur laquelle ils sont situés. Déterminer l'intensité I de rayonnement d'un tel système à l'approximation « ondes longues » $a \ll \frac{c}{\omega}$.

339. Soient deux dipôles ponctuels antiparallèles dont la distance $2a$ est bien inférieure à la longueur de l'onde émise $a \ll \lambda = c/\omega$. Le moment électrique dipolaire de l'un d'eux est $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$. Le vecteur constant $\mathbf{d}_0$ est perpendiculaire à la droite joignant les dipôles. Comparer l'intensité I_μ de rayonnement dipolaire magnétique à celle I_D de rayonnement quadrupolaire électrique en prenant leurs moyennes temporelles sur une période $T = 2\pi/\omega$.

340. Soient deux dipôles élémentaires dont les moments dipolaires sont dirigés suivant une même droite en sens opposés. Chaque dipôle représente un système de deux particules de masses m et de charges e et $-e$, qui sont liées entre elles par une force quasi élastique et oscillent avec une fréquence ω. La distance $2a$ entre les dipôles est considérablement inférieure à la longueur de l'onde émise. Déterminer la loi de décroissance de l'énergie $\mathscr{E}$ des dipôles, en prenant sa valeur moyenne entre les instants t et $t + 2\pi/\omega$, si leur énergie à l'instant initial $t_0 = 0$ était $\mathscr{E}_0$.

341. Soit une sphère chargée en volume avec une symétrie sphérique et animée d'un mouvement oscillant tel que la densité volumique de charge varie dans le temps suivant une loi $\rho = \rho(r, t)$, r étant la distance au centre de la sphère. Cette sphère émettra-t-elle un rayonnement ?

342. Une charge Q est uniformément répartie à l'intérieur d'une goutte dont la surface effectue des oscillations harmoniques autour de la position d'équilibre suivant une loi $r = r_0 (1 + \varepsilon \cos^2 \theta \cos \omega t)$, où r est la distance du centre de la goutte au point sur sa surface, θ l'angle polaire d'un système de coordonnées sphériques et les grandeurs r_0, ω et ε sont constantes ($\varepsilon \ll 1$). En gardant les termes de degré le moins élevé en paramètre ε, déterminer l'intensité I de rayonnement.

343. Soit un disque d'épaisseur négligeable de rayon R, uniformément chargé et tournant autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. La charge totale du disque est Q. Calculer l'intensité I de rayonnement.

344. Soit un anneau d'épaisseur négligeable et de rayon R, uniformément chargé avec une densité linéique q. L'axe de l'anneau

subit une précession avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un autre axe passant par le centre de l'anneau sous un angle θ par rapport à son propre axe (fig. 4). Calculer l'intensité I de rayonnement.

345. Soit une barre d'épaisseur négligeable et de longueur $2l$ portant une charge Q uniformément répartie. La barre tourne dans un plan avec une vitesse angulaire constante ω autour de son point central. Calculer l'intensité I de rayonnement.

346. Un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b, uniformément chargé en volume, oscille dans le plan YZ autour de son centre

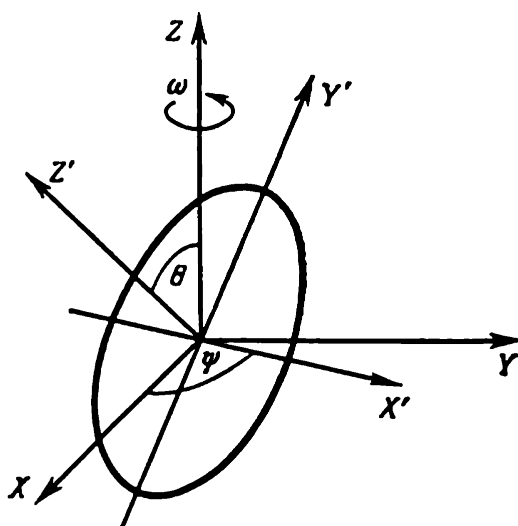


Fig. 4

de façon que l'angle entre son axe de symétrie et l'axe des Z varie suivant une loi harmonique $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ où $\theta_0 \ll 1$. La charge totale de l'ellipsoïde est Q et son demi-axe b se confond avec son axe de symétrie. En gardant les termes de degré le moins élevé en angle θ, calculer l'intensité I_μ de rayonnement dipolaire magnétique et l'intensité I_D de rayonnement quadrupolaire électrique.

347. Soit un disque d'épaisseur négligeable de forme elliptique de demi-axes a et b, uniformément chargé avec une densité superficielle σ. La forme du disque varie au cours du temps, tout en restant plane et ne présentant qu'un petit écart par rapport à un cercle de rayon R. Le paramètre de déformation $\frac{a-b}{a+b}$ varie suivant une loi $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$ où β et ω sont des constantes ($\beta \ll 1$). La surface du disque est égale à celle d'un cercle de rayon R, elle ne varie pas lors de la déformation si on ne tient pas compte des termes quadratiques en petit paramètre β. En conservant les termes de degré le moins élevé en paramètre β, déterminer l'intensité I de rayonnement

quadrupolaire électrique, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$.

348. Soit un parallélépipède rectangle d'arêtes a, a et b uniformément chargé avec une densité volumique ρ. Au cours du temps, ce parallélépipède se déforme de façon que sa surface subit de petites oscillations harmoniques autour de la surface d'un cube d'arête a_0. Le paramètre de déformation $\frac{a-b}{a+b}$ varie suivant une loi $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$ où β et ω sont des constantes ($\beta \ll 1$). Le volume du parallélépipède reste tout le temps constant et égal au volume d'un cube d'arête a_0, si l'on néglige les termes quadratiques en petit paramètre β. Calculer l'intensité I de rayonnement quadrupolaire électrique en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$.

349. Des charges e_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) se déplacent avec des vitesses $\mathbf{v}_i$ dans une région limitée de l'espace. Déterminer les corrections d'ordre $\frac{v_i^2}{c^2} \ll 1$ à apporter au potentiel vecteur et à l'intensité de champ magnétique dans la zone d'onde. En se servant du résultat obtenu, calculer les corrections du même ordre de grandeur à apporter à l'intensité de rayonnement dipolaire électrique en mettant la formule sous la forme

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \Delta I,$$

où $\mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont les moments dipolaires électrique et magnétique, $D_{\alpha\beta}$ est le tenseur de moment électrique quadrupolaire des charges en mouvement et la grandeur ΔI est à déterminer. En exprimant l'intensité de rayonnement d'un système de charges animées d'un mouvement lent, on néglige généralement le terme ΔI bien qu'il puisse être de l'ordre de grandeur des intensités de rayonnements dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique.

350. L'intensité $\mathbf{E}$ du champ électrique entre les armatures d'un condensateur est uniforme et constante. Une particule de masse m et de charge e se déplace à l'intérieur de ce condensateur, parallèlement au champ $\mathbf{E}$, avec une vitesse non relativiste $\mathbf{v}$. En se servant du résultat du problème précédent, déterminer l'intensité de rayonnement aux petits termes d'ordre v^2/c^2 près.

§ 3. Décomposition spectrale du rayonnement

351. Un électron de masse m et de charge e était au repos avant l'instant initial $t_0 = 0$ et se déplace pour $t > 0$ sous l'action d'un champ électrique d'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$. Calculer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise par cet électron sur des fréquences de ω à $\omega + d\omega$.

352. Soit un tronçon de droite de longueur l parcouru par un courant filiforme $J = J_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ où les grandeurs constantes satisfont aux inégalités $\alpha l \ll c$ et $\omega_0 l \ll c$. A des instants $t \leqslant 0$, le courant était nul. Calculer l'énergie émise sur des fréquences de ω à $\omega + d\omega$.

353. Soit une sphère en position fixe, uniformément chargée avec une densité de charge positive ρ. A des instants de temps $t \leqslant 0$, un électron de masse m et de charge e se trouvait au repos à l'intérieur de cette sphère à une distance a de son centre. A des instants suivants $t > 0$, l'électron se déplace sous l'action du champ électrique de la sphère. En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement dipolaire électrique dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$.

354. Soit un oscillateur représentant une particule de masse m et de charge e, qui effectue des oscillations harmoniques de fréquence ω_0 sous l'action d'une force élastique extérieure. A partir de l'instant $t_0 = 0$, l'oscillateur, primitivement au repos, subit l'action d'un champ électrique extérieur d'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ décrite par une fonction continue qui s'annule au bout d'un intervalle de temps fini. En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, calculer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement dipolaire électrique de l'oscillateur dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$.

355. Une particule de masse m et de charge e est suspendue par un fil rigide non pesant et effectue des oscillations de petite amplitude à la fréquence ω_0 dans le champ gravifique. En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la raie spectrale de rayonnement.

356. Un appareil de mesure placé dans la zone d'onde à une grande distance du radiateur a enregistré à des instants $t \leqslant 0$ un champ électrique d'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ où les grandeurs constantes α et ω_0 vérifient l'inégalité $\alpha \ll \omega_0$. Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la raie spectrale de rayonnement qui a traversé l'appareil de mesure.

357. L'ensemble d'atomes d'impureté excités d'un cristal a émis une impulsion électromagnétique qui se propage dans l'espace libre sous forme d'une onde plane

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\tau}\left|t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right|} \cos \omega_0 \left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right),$$

où les vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{n}$ de même que les grandeurs ω_0 et τ sont constantes. La fréquence porteuse ω_0 de l'impulsion et le temps de relaxation τ du cristal sont liés par la condition $\omega_0 \tau \gg 1$. Déterminer la largeur de la raie spectrale de rayonnement.

358. L'intensité de champ électrique d'une émission cohérente spontanée des atomes d'un gaz a la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{4T_0^2}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)^2} \cos \omega_0 \left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right),$$

où ω_0 est la fréquence de la transition atomique de résonance, T_0, le temps de relaxation de Doppler ($\omega_0 T_0 \gg 1$), **n**, le vecteur unité de la direction de propagation de l'onde et $\mathbf{E}_0$, un vecteur constant. Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la raie spectrale de rayonnement.

359. Soit une particule de masse m et de charge positive e à l'état de repos avant l'instant initial. A des instants suivants, elle se déplace sous l'action d'un champ électrique uniforme et constant d'intensité **E**. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ si la particule a parcouru une distance l dans la région où règne ce champ.

360. Un électron de masse m et de charge e pénètre dans un demi-espace où règne un champ électrique uniforme et constant d'intensité **E**. A l'entrée dans le demi-espace, le sens de la vitesse $\mathbf{v}_0$ de l'électron fait un angle aigu α avec le vecteur **E**. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ pendant tout le temps de mouvement de la particule dans ce champ électrique extérieur.

361. Un proton de masse m et de charge e passe avec un grand paramètre d'impact l près d'un noyau immobile possédant une charge Ze. La valeur de l étant grande, l'angle de diffusion est petit. La vitesse du proton avant l'interaction avec le noyau était égale en valeur absolue à v_0. Déterminer le nombre dN_ω de quanta mous émis par le proton dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ où $\omega \ll \frac{v_0}{l}$. L'énergie d'un quantum est $\hbar\omega$.

362. Soient deux particules de masses m_1 et m_2 et de charges de même nom e_1 et e_2, qui se déplacent suivant une droite, de l'infini à la rencontre l'une de l'autre. Lorsque la distance relative des particules devient égale à l, elles s'arrêtent et recommencent le mouvement dans le sens opposé pour s'en aller à l'infini. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement dipolaire électrique dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$. Etudier l'expression obtenue dans le domaine des fréquences faibles et dans celui des fréquences élevées.

363. A l'instant initial $t_0 = 0$, deux particules de masses m_1 et m_2 et de charges de même nom e_1 et e_2 étaient au repos à une distance l l'une de l'autre. Puis, sous l'effet de l'interaction coulombienne, elles se repoussent et s'éloignent à une distance infiniment grande. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement dipolaire électrique dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$. Etudier l'expression obtenue dans le domaine des fréquences faibles et dans celui des fréquences élevées. Comparer avec les formules analogues obtenues dans le problème précédent.

364. L'énergie d'interaction de deux particules chargées est une fonction arbitraire de leur distance et provoque leur répulsion mutuelle. Considérer deux cas de mouvement : a) les particules se rapprochent suivant une droite et, après l'arrêt, s'éloignent à une

distance infiniment grande, en se déplaçant dans des sens opposés; b) après l'arrêt, les particules restent immobiles (ou, au contraire, à partir d'un certain instant, les particules primitivement au repos s'éloignent l'une de l'autre et s'en vont à l'infini). Démontrer que les décompositions spectrales du rayonnement dipolaire électrique dans ces deux cas

$$d\mathscr{E}^a_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \mid \ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) \mid^2 d\omega, \quad d\mathscr{E}^b_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \mid \ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) \mid^2 d\omega$$

s'expriment par une seule et même fonction complexe $f(\omega)$ à l'aide des relations

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = \mathbf{1}2\,\mathrm{Re}\, f(\omega), \quad \ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = \mathbf{1} f(\omega),$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur unité constant et parallèle à la trajectoire rectiligne. De plus, la fonction $f(\omega)$ satisfait à la condition

$$2\int_0^\infty (\mathrm{Re}\, f(\omega))^2\, d\omega = \int_0^\infty \mid f(\omega) \mid^2 d\omega,$$

alors que les énergies totales de rayonnement dipolaire électrique diffèrent de deux fois $\mathscr{E}^a = 2\mathscr{E}^b$.

365. Un moment dipolaire $\mathbf{d}$ est constant en sens mais varie en module au cours du temps suivant une loi périodique de période $T = 2\pi/\omega_0$. Représenter la moyenne temporelle prise sur une période T de l'intensité I de rayonnement par une somme des rayonnements sur des harmoniques dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale ω_0.

366. Soit un domaine suffisamment petit de l'espace parcouru par des courants, dont le moment magnétique varie au cours du temps suivant une loi $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 e^{-t^2/T^2}$, où $\boldsymbol{\mu}_0$ est un vecteur constant et T une constante. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise dans l'intervalle de fréquences de ω à $\omega + d\omega$ pendant un temps infini de $t = -\infty$ à $t = \infty$.

367. Soit un cadre fixe d'épaisseur négligeable parcouru pendant un intervalle de temps indéfini $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ par un courant filiforme $J = J_0 \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2}$ où J_0 et τ sont des constantes. La surface du cadre est S et ses dimensions linéaires sont petites par rapport à la quantité $c\tau$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$.

368. Soient deux dipôles ponctuels identiques antiparallèles, placés sur une même droite à la distance $2a$ l'un de l'autre. A partir de l'instant $t_0 = 0$, ils effectuent des oscillations harmoniques amorties. Le moment de l'un des dipôles est $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t$, où $\gamma \ll \omega_0$ et le vecteur $\mathbf{d}_0$ est porté par la droite joignant les dipô-

les. La distance entre les dipôles est petite par rapport aux longueurs principales des ondes émises. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise sur les fréquences comprises dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$.

369. Résoudre le problème précédent dans l'hypothèse où le vecteur $\mathbf{d}_0$ est perpendiculaire à la droite joignant les dipôles ponctuels.

370. Deux noyaux de nombres de masse A_1 et A_2 et de charges Z_1e et Z_2e se déplacent suivant une même droite de l'infini l'un vers l'autre. Dans le système du centre d'inertie, avant l'interaction l'énergie cinétique totale des deux noyaux était égale à $\mathscr{E}_0$. Après l'arrêt, ils s'en vont de nouveau à l'infini. Le rapport de la charge à la masse est le même pour les deux noyaux $\frac{Z_1e}{A_1m} = \frac{Z_2e}{A_2m} = \frac{Ze}{Am}$, m étant la masse du nucléon et Z et A certains nombres. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$. Etudier les cas limites des fréquences faibles et élevées.

371. Un noyau se désintègre en deux fragments de nombres de masse A_1 et A_2 et de charges Z_1e et Z_2e. Ces fragments se caractérisent par le même rapport de la charge à la masse $\frac{Z_1e}{A_1m} = \frac{Z_2e}{A_2m} = \frac{Ze}{Am}$, m étant la masse du nucléon, et Z et A certains nombres. Sous l'effet de l'interaction coulombienne, les fragments s'éloignent ensuite l'un de l'autre à une distance infiniment grande, possédant une énergie totale $\mathscr{E}_0$. Avant le commencement du mouvement leurs vitesses étaient nulles. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ au cours du mouvement des fragments. Etudier les cas limites des fréquences faibles et élevées. Comparer les résultats obtenus avec des formules analogues du problème précédent.

372. Soient deux particules chargées ayant le même rapport de la charge à la masse. L'énergie d'interaction de ces particules est une fonction arbitraire de la distance qui les sépare et conduit à leur répulsion mutuelle. Considérer les cas de mouvement suivants: a) les particules se rapprochent suivant une droite et, après l'arrêt, s'éloignent de nouveau à une distance infiniment grande, se déplaçant dans les sens inverses; b) après l'arrêt, les particules restent immobiles (ou, au contraire, les particules immobiles vont depuis un certain instant vers l'infini en se déplaçant dans des sens opposés). Démontrer que les décompositions spectrales du rayonnement quadrupolaire électrique dans les cas indiqués

$$d\mathscr{E}^a_\omega = \frac{|\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5}\,d\omega, \quad d\mathscr{E}^b_\omega = \frac{|\dddot{D}^b_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5}\,d\omega$$

s'expriment par une seule et même fonction complexe $f_{\alpha\beta}(\omega)$ à l'aide des relations

$$\dddot{D}^a_{\alpha\beta}(\omega) = 2i\,\mathrm{Im}\,f_{\alpha\beta}(\omega), \quad \dddot{D}^b_{\alpha\beta}(\omega) = f_{\alpha\beta}(\omega).$$

La fonction $f_{\alpha\beta}(\omega)$ satisfait à la condition

$$2\int_0^\infty (\mathrm{Im}\, f_{\alpha\beta}(\omega))^2\, d\omega = \int_0^\infty |f_{\alpha\beta}(\omega)|^2\, d\omega,$$

alors que les énergies totales du rayonnement quadrupolaire électrique diffèrent de deux fois $\mathscr{E}^a = 2\mathscr{E}^b$.

373. Une particule de charge e tombe avec un paramètre d'impact l sur la surface latérale d'un cône parfaitement élastique de hauteur h et de rayon R à la base ($R > l$). La vitesse initiale de la particule est parallèle à l'axe du cône. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ de rayonnement dipolaire émise sur les fréquences allant de ω à $\omega + d\omega$.

374. Un flux uniforme de particules de charge e tombe avec une vitesse v sur une sphère parfaitement élastique de rayon R. Calculer le rayonnement efficace $d\varkappa_\omega$ dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$. La grandeur $d\varkappa_\omega$ est définie par la formule

$$d\varkappa_\omega = \int_0^\infty d\mathscr{E}_\omega \cdot 2\pi l\, dl,$$

où $d\mathscr{E}_\omega$ est l'énergie de rayonnement dipolaire électrique dans l'intervalle de fréquence $d\omega$ de la particule qui passe avec le paramètre d'impact l.

§ 4. Répartition angulaire du rayonnement

375. Une particule de masse m et de charge e se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme et constant d'intensité $\mathbf{H}_0$. La vitesse de la particule est égale en valeur absolue à v. Calculer l'intensité dI de rayonnement dipolaire électrique dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période de mouvement de la particule.

376. Soit un cadre rectangulaire parcouru par un courant filiforme constant J et tournant autour de sa diagonale avec une vitesse angulaire constante ω. La surface du cadre est S et ses dimensions linéaires sont petites par rapport à la longueur de l'onde émise. Calculer l'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période de rotation du cadre.

377. Un proton de masse m et de charge e quitte un noyau immobile dont le rayon est R et la charge restante Ze. A la sortie du noyau, la vitesse du proton est nulle. Déterminer la répartition angulaire de l'énergie totale $d\mathscr{E}_n$ du rayonnement dipolaire électrique dû à l'interaction coulombienne entre le proton et le noyau.

378. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur h contenant une charge Q uniformément répartie à l'intérieur de son volume. La

surface du cylindre subit des oscillations harmoniques de faible amplitude autour de la position d'équilibre déterminée par un rayon R_0 et une hauteur $h_0 = R_0$. Le paramètre de déformation $\frac{R-h}{R+h}$ varie dans le temps suivant une loi $\frac{R-h}{R+h} = \varepsilon \cos \omega t$ où ε et ω sont des constantes ($\varepsilon \ll 1$). Le volume du cylindre reste tout le temps constant et égal à πR_0^3 si l'on ne tient pas compte des termes quadratiques en petit paramètre ε. Calculer l'intensité dI de rayonnement quadrupolaire électrique dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$.

379. Un cylindre de rayon R et de hauteur h uniformément chargé, tourne avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe passant par son point milieu perpendiculairement à son axe de symétrie. La charge totale du cylindre est Q. Déterminer l'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période de rotation.

380. Soit un quadrupôle représenté par un système de quatre charges placées aux sommets d'un carré de côté l. Le signe de la charge e s'inverse lorsqu'on passe d'un sommet au sommet voisin. En supposant que le quadrupôle tourne dans le plan XY autour de son centre avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$, déterminer la répartition angulaire de l'intensité dI de rayonnement, en prenant sa moyenne temporelle sur une période de rotation.

381. En se déplaçant parallèlement à l'axe des Z, une particule chargée tombe, avec un paramètre d'impact l, sur une sphère parfaitement élastique de rayon R ($R > l$). L'origine des coordonnées est au centre de la sphère, alors que la trajectoire de la particule portant une charge e se situe dans le plan XZ. Calculer l'énergie $d\mathcal{E}_{n\omega}$ émise dans l'angle solide $d\Omega$ aux fréquences comprises dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$.

382. Le moment quadrupolaire D d'un corps de révolution varie dans le temps suivant une loi $D = D_0 e^{-(t/T)^2}$ où D_0 et T sont des constantes. Calculer l'énergie $d\mathcal{E}_{n\omega}$ émise dans l'angle solide $d\Omega$ dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ pendant un temps infini de $t = -\infty$ à $t = \infty$.

383. La désintégration d'un noyau immobile de rayon R émet une particule alpha de vitesse nulle. La charge de la particule alpha est Q et son rayon est négligeable par rapport à R. Sous l'action de la répulsion coulombienne, la particule alpha s'en va à l'infini. Déterminer la répartition angulaire $d\mathcal{E}_n$ de l'énergie totale du rayonnement compte tenu du petit terme d'ordre $\frac{v}{c} \ll 1$, v étant la vitesse de la particule alpha à l'infini.

384. Une particule de masse m et de charge e parcourt une distance l dans un champ électrique uniforme et continu d'intensité $\mathbf{E}$. La vitesse $\mathbf{v}_0$ de la particule à l'entrée dans ce champ extérieur était

parallèle au vecteur **E**. Déterminer la répartition angulaire $d\mathscr{E}_n$ de l'énergie totale du rayonnement compte tenu du petit terme d'ordre v/c, v étant la vitesse de la particule à la sortie du champ extérieur.

385. Un proton de masse m et de charge e, primitivement au repos, est repoussé par un champ électrique uniforme et constant d'intensité **E**, après qu'il a parcouru dans ce champ une distance l. La vitesse v du proton à la sortie du champ extérieur est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_{n\omega}$ émise par le proton dans l'angle solide $d\Omega$ sur les fréquences comprises dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$ compte tenu du petit terme d'ordre v/c.

386. Soient deux dipôles ponctuels identiques et antiparallèles situés sur l'axe des X à une même distance a de l'origine des coordonnées et variables dans le temps suivant une loi harmonique. Au point de coordonnée positive, le moment électrique dipolaire est parallèle à l'axe des Y et égal à $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$. La distance entre les dipôles est petite par rapport à la longueur de l'onde émise $a \ll \lambda = c/\omega$. Calculer l'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation des dipôles.

387. Deux dipôles électriques antiparallèles de moments constants **d** et —**d** sont situés aux extrémités opposées du diamètre et tournent dans le plan XY suivant une circonférence de rayon R avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$. L'origine des coordonnées est au centre de la circonférence et l'axe des Z est parallèle au vecteur **d**. Déterminer à l'approximation des ondes longues la répartition angulaire de l'intensité dI de rayonnement en prenant sa moyenne temporelle sur une période de rotation.

388. Deux dipôles électriques antiparallèles de moments **d** et —**d** situés sur l'axe des Z à une même distance a de l'origine des coordonnées tournent avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ dans des plans perpendiculaires à l'axe des Z. Déterminer à l'approximation des ondes longues la répartition angulaire de l'intensité dI de rayonnement en prenant sa moyenne temporelle sur une période de rotation.

389. N dipôles ponctuels parallèles de moments $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ sont disposés sur une même droite et à une même distance a l'un de l'autre. Le vecteur constant $\mathbf{d}_0$ est orienté de façon quelconque par rapport au vecteur **a** joignant deux dipôles consécutifs. La distance entre les dipôles est de l'ordre de grandeur de la longueur de l'onde émise $a \sim \frac{c}{\omega}$. En considérant le champ électromagnétique à grande distance du système, déterminer l'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$.

390. Cinq dipôles ponctuels identiques de moments $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ sont disposés comme il est indiqué sur les figures 5 et 6. Le vecteur $\mathbf{d}_0$ est constant et la distance entre deux dipôles consécutifs est égale à la longueur de l'onde émise c/ω. Déterminer dans les

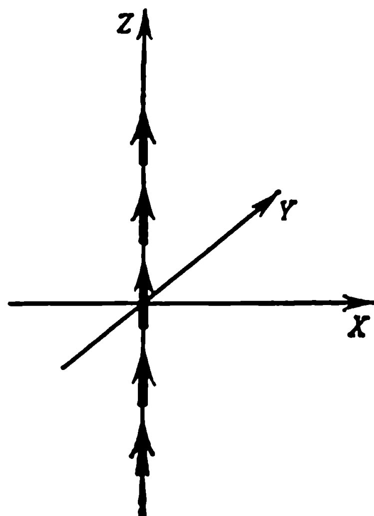


Fig. 5

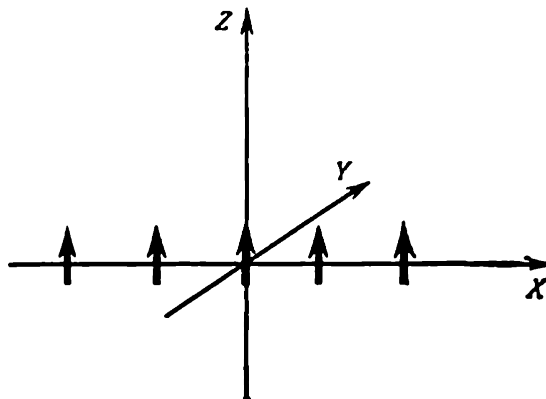


Fig. 6

deux cas indiqués l'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Indiquer les directions de rayonnement maximal.

§ 5. Polarisation des ondes émises

391. Une charge positive e tourne sur une circonférence de rayon R avec une vitesse angulaire constante ω. Déterminer la polarisation des ondes de rayonnement dipolaire électrique.

392. Un moment magnétique tourne dans un seul et même plan avec une vitesse angulaire constante. Déterminer la polarisation des ondes émises.

393. Un électron de masse m et de charge e se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme et constant d'intensité H_0. La vitesse de l'électron est égale, en valeur absolue, à v. Déterminer la polarisation des ondes de rayonnement quadrupolaire électrique.

394. Un électron est soumis au champ électromagnétique d'une onde monochromatique polarisée rectilignement. Déterminer la polarisation des ondes de rayonnement dipolaire électrique cohérent de l'électron.

395. Un cadre d'épaisseur négligeable, parcouru par un courant filiforme, a la forme d'une circonférence dont le plan garde une position fixe dans l'espace et le rayon augmente avec le temps.

Déterminer la polarisation des ondes électromagnétiques émises.

396. Soient deux particules identiques chargées qui se déplacent dans l'espace libre suivant une droite, en se repoussant. Déterminer la polarisation des ondes émises.

397. Soit un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b, chargé uniformément avec une densité volumique ρ, dont la surface subit des oscillations harmoniques de faible amplitude autour de la surface d'une sphère de rayon R. Le paramètre de déformation $\frac{a-b}{a+b}$ varie suivant une loi $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$, où $\beta \ll 1$ et le demi-axe b se confond avec l'axe de symétrie axiale de l'ellipsoïde. Le volume de l'ellipsoïde reste tout le temps constant et égal au volume de la sphère de rayon R, si l'on néglige les termes quadratiques en petit paramètre β. Déterminer la répartition angulaire de l'intensité dI de rayonnement, l'intensité totale I de rayonnement dans toutes les directions, en prenant la moyenne temporelle sur une période d'oscillation; déterminer la polarisation des ondes émises. Ce problème décrit un modèle du rayonnement lors des transitions entre les niveaux énergétiques vibrationnels du noyau.

398. Soit un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b contenant une charge totale Q uniformément répartie à l'intérieur du

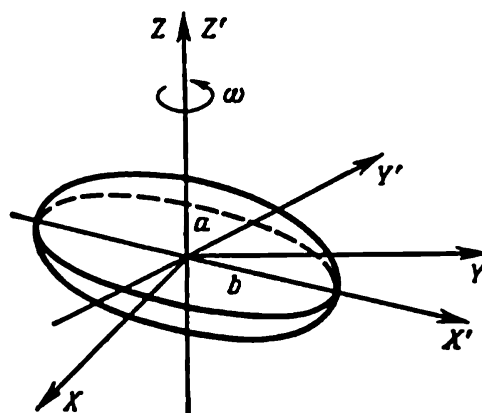


Fig. 7

volume qu'il limite. Cet ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son demi-axe a qui n'est pas son axe de symétrie axiale (fig. 7). Calculer la répartition angulaire de l'intensité dI de rayonnement et l'intensité totale I de rayonnement dans toutes les directions en prenant la moyenne temporelle sur une période de rotation; déterminer la polarisation des ondes émises. Ce problème décrit un modèle du rayonnement lors des transitions entre les niveaux énergétiques rotationnels du noyau.

§ 6. Diffusion des ondes électromagnétiques

399. Une onde plane polarisée rectilignement tombe sur un électron libre de masse m et de charge e. Représenter la section différentielle $d\sigma$ de diffusion de l'onde dans un angle solide $d\Omega$ en fonction des angles de diffusion. Quelle est la valeur de la section efficace totale σ de diffusion?

400. Résoudre le problème précédent en supposant que l'onde plane n'est pas polarisée.

401. Une onde polarisée circulairement $\mathbf{E} = E_0 [\mathbf{1}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{1}_y \sin(\omega t - kz)]$ tombe sur un électron libre de masse m et de charge e. Calculer l'intensité dI de rayonnement diffus dans un angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Quelle est la valeur de la section efficace totale σ de diffusion de l'onde?

402. Dans le modèle de l'atome d'hydrogène proposé par J. J. Thomson, un électron de masse m et de charge e est animé d'un mouvement oscillant à l'intérieur d'une sphère immobile positive de rayon R uniformément chargée. Calculer la section efficace différentielle $d\sigma$ et la section efficace totale σ de diffusion d'une onde polarisée circulairement sur un tel atome. La fréquence ω de l'onde incidente est différente de la fréquence atomique et sa longueur est grande par rapport au diamètre de la sphère.

403. En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, calculer la section efficace différentielle $d\sigma$ et la section efficace totale σ de diffusion d'une onde plane polarisée rectilignement sur l'atome d'hydrogène décrit par le modèle de Thomson (voir le problème précédent). La fréquence ω de l'onde incidente peut coïncider avec la fréquence atomique et sa longueur est grande par rapport au diamètre de l'atome.

404. Un électron de masse m et de charge e est animé d'un mouvement oscillant à l'intérieur d'un cylindre uniformément chargé avec une densité volumique ρ. En tenant compte de la force de frottement de rayonnement, calculer la section efficace différentielle $d\sigma$ et la section efficace totale σ de diffusion d'une onde plane polarisée rectilignement sur cet électron. La longueur de l'onde incidente est grande par rapport au diamètre du cylindre et le vecteur polarisation est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

405. Déterminer la section efficace différentielle $d\sigma$ et la section efficace totale σ de diffusion d'une onde plane polarisée elliptiquement

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + \mathbf{1}_y b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

sur un électron libre de masse m et de charge e.

406. Déterminer la section efficace totale σ de diffusion d'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement $\mathbf{H} =$

$= \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ sur un neutron libre dont le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et le moment cinétique $\mathbf{M}$ sont liés par la relation $\boldsymbol{\mu} = -\beta\mathbf{M}$. La fréquence βH_0 de précession du moment magnétique est petite par rapport à la fréquence ω de l'onde incidente.

407. Un atome de polarisabilité β se trouve au repos dans le champ électromagnétique d'une onde polarisée elliptiquement $\mathbf{E} = \mathbf{1}_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + \mathbf{1}_y b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$. La longueur de cette onde électromagnétique est grande par rapport à la dimension linéaire de l'atome si bien que celui-ci acquiert dans le champ électrique extérieur un moment électrique dipolaire $\mathbf{d} = \beta\mathbf{E}$. Déterminer la section efficace différentielle $d\sigma$ et la section efficace totale σ de diffusion de l'onde électromagnétique sur cet atome.

408. Soit un atome dont le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre de gravité est égal à J et le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ a une orientation équiprobable dans l'espace. Déterminer la section efficace totale de diffusion, sur cet atome, d'une onde plane polarisée rectilignement $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ en prenant sa valeur moyenne sur la direction du vecteur $\mathbf{d}$. Pour simplifier les formules, supposer que la fréquence de rotation Ω du vecteur $\mathbf{d}$ est négligeable par rapport à la fréquence caractéristique égale à $\sqrt{dE_0/J}$.

§ 7. Rayonnement des sources étendues

409. Soit un volume fini en contact avec le vide et parcouru par un courant avec une densité volumique $\mathbf{j}$. Dans l'intervalle de t_1 à t_2, la densité volumique de ce courant varie avec le temps et est nulle ou constante partout en dehors de cet intervalle. Les instants t_1 et t_2 sont arbitraires et, en particulier il est possible que $t_1 \to \infty$ et $t_2 \to \infty$. Démontrer que dans la zone d'onde où les intensités $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ du champ électrique et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ du champ magnétique décroissent en module inversement proportionnellement à la distance du courant donné, elles satisfont aux égalités

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\, dt = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}, t)\, dt = 0.$$

410. Un tronçon $[-l, l]$ d'axe des Z est parcouru par un courant filiforme

$$J = J_0 \cos kz \sin \omega t,$$

où $\omega = kc$, $k = (2m + 1)\,\pi/2l$, m est un entier positif et c la vitesse de la lumière dans le vide. Calculer l'intensité dI de rayonnement dans un angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Le problème considéré fournit un exemple de rayonnement d'une antenne filaire.

411. On appelle résistance de rayonnement d'une antenne filaire la grandeur $R = 2I/J_0^2$ où I est la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité de rayonnement du courant filiforme $J = J_0 \cos kz \sin \omega t$ parcourant cette antenne. En se servant des résultats du problème précédent, représenter la résistance de rayonnement de l'antenne sous la forme

$$R = \frac{1}{c} \int_0^{(2m+1)2\pi} \frac{1-\cos x}{x}\, dx.$$

412. Une antenne filaire, confondue avec l'axe des Z, est parcourue par une onde de courant $J = J(t - z/c)$, où $|z| \leqslant l$, c est la vitesse de la lumière dans le vide et $J(t - z/c)$ une fonction dérivable. Déterminer les intensités du champ électrique **E** et du champ magnétique **H** rayonnés aux points du plan XY à grande distance de l'antenne dans la zone d'onde.

413. Un tronçon $[-l, l]$ d'axe des Z est parcouru à des instants $t \geqslant 0$ par un courant filiforme

$$J = J_0 \cos k_m z e^{-\gamma t} \sin \omega_m t$$

où $\omega_m = k_m c$, $k_m = (2m + 1)\,\pi/2l$, m est un entier positif et c la vitesse de la lumière dans le vide. Calculer les intensités des champs électrique et magnétique **E** et **H** aux points du plan XY situés à grande distance r du courant ($r \gg k_m l^2$). Représenter le champ électromagnétique rayonné par une superposition d'ondes monochromatiques de différentes fréquences en admettant que $\gamma \ll \omega_m$.

414. Une antenne filaire de longueur $2l$ est parcourue par une onde de courant

$$J = J_0 \cos(\omega t - kz),$$

où $\omega = kc$ et $|z| \leqslant l$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide. Déterminer la répartition angulaire de l'intensité de rayonnement de l'antenne en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation du courant.

415. Soient N antennes filaires de longueur $2l$, parallèles et situées dans le plan XZ à une même distance l'une de l'autre. Le vecteur **a** joignant deux antennes consécutives est parallèle à l'axe des X. La distance entre les antennes est de l'ordre de grandeur de la longueur de l'onde rayonnée $a \sim c/\omega$. Chacune des antennes est parcourue par un courant filiforme

$$J = J_0 \sin kz \cos \omega t,$$

où $|z| \leqslant l$, $\omega = kc$, $k = m\pi/l$, m est un entier positif et c la vitesse de la lumière dans le vide. Déterminer l'intensité **H** du champ magnétique de rayonnement à grande distance $r \gg l^2/a$ des antennes.

Calculer l'intensité de rayonnement dI dans un angle solide $d\Omega$ en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 4l/c$.

416. Une plaque infiniment mince $(-b \leqslant x \leqslant b,\ -l \leqslant z \leqslant l)$ est parcourue, parallèlement à l'axe des Z, par un courant avec une densité superficielle $i = i_0 \sin kz \cos \omega t$, où $\omega = kc$, $k = m\pi/l$, m est un entier positif et c la vitesse de la lumière dans le vide. La largeur et la longueur de la plaque sont de l'ordre de grandeur de la longueur de l'onde rayonnée. Déterminer l'intensité de rayonnement dI dans un angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 4l/c$.

417. Une surface cylindrique de rayon R est parcourue, parallèlement à son axe, par une onde de courant avec une densité superficielle $i = i_0 \cos(\omega t - kz)$, où $|z| \leqslant l$, $\omega = kc$ et c est la vitesse de la lumière dans le vide. La longueur c/ω de l'onde rayonnée est de l'ordre de grandeur du rayon R. Déterminer l'intensité dI de rayonnement dans un angle solide $d\Omega$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période d'oscillation du courant.

418. L'axe des Z d'un système de coordonnées cartésiennes est commun à deux cônes circulaires identiques qui sont disposés symétriquement par rapport au plan XY et ont un sommet commun situé à l'origine de ce système de coordonnées. La génératrice de chaque cône a une longueur b et fait avec son axe un angle θ_0. Le courant total parcourant les surfaces latérales des cônes se décrit par la fonction $J = J(r, t)$ où r est la distance au sommet commun des cônes. Déterminer l'intensité dI de rayonnement dans un angle solide $d\Omega$. Etudier les expressions limites de la formule obtenue dans deux cas où $\theta_0 \to 0$ et $\theta_0 = \pi/2$.

§ 8. Problèmes à résoudre sur calculateur électronique

419. Un électron d'énergie $\mathscr{E} = e^2/2a$ est diffusé sur un atome d'hydrogène dont le champ électrique est déterminé par le potentiel $\varphi(r) = e\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-2r/a}$, où e est la charge du proton, $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ le rayon de Bohr, m la masse de l'électron et $\hbar$ la constante de Planck. Déterminer l'énergie totale $\mathscr{E}_d$ du rayonnement dipolaire électrique au cours de la diffusion. En procédant au calcul sur calculateur électronique, construire la courbe traduisant la variation de l'énergie rayonnée $\mathscr{E}_d$ en fonction du paramètre d'impact l de l'électron passant.

420. Un flux de particules de masse m, de charge e et d'énergie $\mathscr{E}_0$ se déplace dans un champ de potentiel à symétrie sphérique $U(r) = U_0 e^{-r/a}$ où a et U_0 sont des constantes positives. Calculer

le rayonnement efficace $\varkappa = \int\limits_0^\infty \Delta\mathscr{E}\cdot 2\pi l\, dl$, où $\Delta\mathscr{E}$ est l'énergie totale du rayonnement dipolaire électrique de la particule passant avec un paramètre d'impact l. En effectuant des calculs sur calculateur électronique, construire la courbe représentative de la variation du rayonnement efficace $\varkappa$ en fonction de l'énergie $\mathscr{E}_0$ dans la région $0{,}1U_0 \leqslant \mathscr{E}_0 \leqslant 10U_0$.

421. Une particule de charge Q se déplace avec une vitesse v suivant une droite près d'un oscillateur chargé, primitivement au repos, dont la fréquence propre est ω_0, la masse m et la charge e. La distance l entre le centre de l'oscillateur et la trajectoire rectiligne de la particule est si grande que la variation de la vitesse v peut être négligée. En négligeant aussi la force de frottement de rayonnement, construire une courbe traduisant l'intensité I de rayonnement de l'oscillateur sous l'action de la particule chargée en mouvement. Pour les calculs sur calculateur électronique, poser $v = \omega_0 l$ et admettre que l'amplitude des oscillations de l'oscillateur est petite par rapport à l.

422. Soit un oscillateur immobile avec frottement (avec amortissement) qui est soumis, à partir de l'instant $t = t_0$, à l'action d'une force extérieure $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{-t^2/\tau^2}$ de sorte que l'équation de son mouvement a pris la forme

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{-t^2/\tau^2},$$

où ω_0 et m sont la fréquence propre et la masse de l'oscillateur, alors que le coefficient γ caractérise les pertes d'énergie dues au frottement. La charge de la particule oscillante est e. En posant $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$ et en utilisant les méthodes numériques, construire et comparer l'une à l'autre les courbes d'intensité I de rayonnement de l'oscillateur sous l'action de force extérieure $\mathbf{F}$ dans deux cas: $t_0 = 0$ et $t_0 = -\infty$.

423. Un noyau lourd de charge Q se déplace avec une vitesse v suivant une trajectoire rectiligne à une grande distance l d'un atome immobile électriquement neutre dont la polarisabilité est β. Cette dernière caractéristique signifie qu'étant soumis à un champ électrique extérieur d'intensité $\mathbf{E}$, cet atome acquiert un moment électrique dipolaire $\mathbf{d} = \beta\mathbf{E}$. En négligeant la variation de la vitesse $\mathbf{v}$ du noyau en mouvement, calculer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ émise par l'atome polarisé dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$. En appliquant les méthodes numériques, construire une courbe $d\mathscr{E}_\omega/d\omega$ de décomposition spectrale du rayonnement.

424. Soient deux noyaux de nombres de masse A_1 et A_2 et de charge Z_1e et Z_2e. Dans le système du centre d'inertie, leur énergie totale est $\mathscr{E}_0$. La masse du nucléon est m. Considérer deux cas de

mouvement: a) les noyaux se déplacent l'un vers l'autre suivant une droite et, après l'arrêt, s'en vont à l'infini; b) à partir de l'instant $t = 0$, les noyaux qui sont des fragments d'un grand noyau, vont vers l'infini (leurs vitesses à l'instant initial $t = 0$ étaient nulles). Déterminer les densités spectrales de rayonnement $d\mathcal{E}_\omega^a/d\omega$ et $d\mathcal{E}_\omega^b/d\omega$ dans les cas a et b. En utilisant les méthodes numériques, construire et comparer les courbes de décomposition spectrale du rayonnement dans les deux cas indiqués.

425. Résoudre le problème précédent en supposant que le rapport de la charge à la masse est le même pour les deux noyaux:

$$\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}.$$

426. Soit une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace dans le sens du vecteur unité $\mathbf{n}$. L'intensité du champ électrique de cette onde est

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(t'/\tau)^4} \cos \omega_0 t',$$

où $t' = t - \frac{\mathbf{nr}}{c}$, $\mathbf{E}_0$ est un vecteur constant, c la vitesse de la lumière dans le vide et les paramètres τ et ω_0 vérifient l'inégalité $\omega_0 \tau \gg 1$. En appliquant les méthodes numériques, construire la raie spectrale $\mathcal{E}(\omega)$ du rayonnement qui se propage sous la forme de l'impulsion électromagnétique donnée. Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la raie spectrale.

427. Une plaque infiniment mince $(-b \leqslant x \leqslant b,\ -l \leqslant z \leqslant l)$ est parcourue, parallèlement à l'axe des Z, par une onde de courant de densité superficielle $\mathbf{i} = \mathbf{1}_z i_0 \exp\left[-\frac{1}{\tau^6}\left(t - \frac{z}{c}\right)^6\right]$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide et i_0 et τ sont des constantes. Déterminer les intensités $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ des champs électrique et magnétique du rayonnement aux points sur l'axe des X à une grande distance r de la plaque. En posant $b = l = c\tau$, construire la courbe de variation de l'intensité du champ électrique en fonction du temps pour un certain point d'observation fixe de la zone d'onde. Construire la raie spectrale $\mathcal{E}(\omega)$ du rayonnement passant par ce point d'observation.

428. Soit un cylindre de rayon R et de hauteur $2h$ parcouru, suivant son axe, par une onde de courant de densité volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-(r/R)} \cos(kz - \omega t)$, où $\omega = kc$ et r et z sont les coordonnées cylindriques. Le vecteur constant $\mathbf{j}_0$ est parallèle à l'axe des Z. L'origine des coordonnées est choisie au point central du cylindre. Déterminer la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité de rayonnement par unité d'angle solide $dI/d\Omega$ en fonction de l'angle polaire θ compté à partir de l'axe du cylindre. Construire le diagramme directionnel de rayonnement en portant la valeur numérique de la grandeur $dI/d\Omega$ pour chaque angle θ

sous forme de tronçon sur un rayon faisant le même angle avec l'axe polaire qui est confondu avec l'axe du cylindre. Pour le calcul sur calculateur électronique, poser $h = R = 1/k$.

429. Soit un dipôle émetteur bicône constitué par les surfaces de deux cônes circulaires identiques ayant le sommet commun et l'axe commun. La génératrice de chaque cône a une longueur l et fait avec son axe un angle $\pi/4$. La surface bicône est parcourue, dans le sens de la génératrice, par un courant total $J = J_0 \cos kr \times \times \sin \omega t$ où $k = \omega/c = \pi/2l$ et r est la distance au sommet commun. Déterminer la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité de rayonnement par unité d'angle solide $dI/d\Omega$ en fonction de l'angle polaire θ compté à partir de l'axe du dipôle bicône. En appliquant les méthodes numériques, construire la courbe de variation de la grandeur $dI/d\Omega$ en fonction de l'angle θ.

430. A un instant $t = 0$, une impulsion de courant a été rayonnée d'un point d'espace de rayon vecteur $\mathbf{r} = 0$. Cette impulsion a commencé à se propager dans toutes les directions avec une densité volumique $\mathbf{j} = \frac{(\mathbf{1r})\,\mathbf{r}}{r^2} F(r, t)$ où $\mathbf{1}$ est un vecteur unité constant et $F(r, t)$ une fonction arbitraire du module r du rayon vecteur et du temps t. Déterminer les intensités $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ des champs électrique et magnétique dans la zone d'onde où ces grandeurs décroissent en raison inverse de la distance du courant. En posant

$$F(r, t) = j_0 \frac{\lambda^2 e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \cdot \frac{t - \frac{r}{c}}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{r}{c}\right)},$$

où $t \geqslant \frac{r}{c}$, c est la vitesse de la lumière dans le vide et les constantes λ et τ sont liées par la condition $c\tau = 10\lambda$, construire la courbe de variation de l'intensité du champ électrique du rayonnement en fonction du temps pour un certain point d'observation fixe de la zone d'onde.

CHAPITRE V

CHAMP PRODUIT PAR DES PARTICULES RELATIVISTES CHARGÉES

On appelle système de référence (repère ou référentiel) galiléen un système de coordonnées galiléen et une horloge fixée par rapport à ce système. On convient de noter chaque événement réalisé par les coordonnées x, y et z du point où il a eu lieu et le temps t de sa réalisation dans un système galiléen déterminé.

A chaque événement on peut faire correspondre un point dans un espace à quatre dimensions caractérisé par un quadrirayon vecteur x_i de composantes

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict. \tag{V.1}$$

La somme des carrés des composantes du quadrirayon vecteur

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{V.2}$$

représente le carré de la distance du point (V.1) à l'origine des coordonnées et détermine la métrique de l'espace à quatre dimensions donné.

Soit un système galiléen affecté de prime $X'Y'Z'$ animé d'un mouvement suivant l'axe des X avec une vitesse **V** par rapport

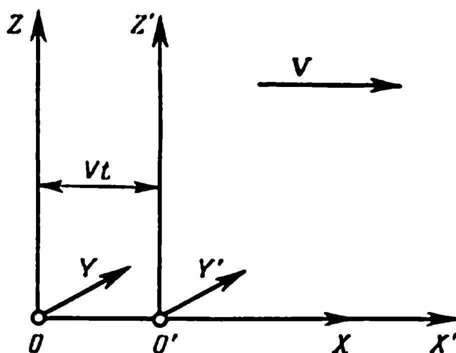


Fig. 8

à un système de coordonnées fixe XYZ. Les axes de coordonnées cartésiennes de même nom sont parallèles et, à l'instant $t = 0$, les origines de ces deux systèmes de coordonnées sont confondues (fig. 8). Alors, les coordonnées et le temps d'un seul et même évé-

nement enregistrés dans les systèmes galiléens sont liés entre eux par la transformation de Lorentz

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (V.3)$$

ou, en notation quadridimensionnelle,

$$x_1=\frac{x_1'-i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad x_2=x_2',\quad x_3=x_3',\quad x_4=\frac{x_4'+i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Cette dernière transformation s'écrit commodément sous forme matricielle *)

$$x_i=a_{ik}x_k', \qquad (V.4)$$

$$a_{ik}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \qquad (V.5)$$

Les formules de la transformation inverse sont obtenues en inversant le signe de la vitesse V:

$$x_i'=a_{ik}^{-1}x_k=a_{ik}^{T}x_k. \qquad (V.6)$$

Puisque la matrice (V.5) satisfait à la condition $a_{ik}^{-1}=a_{ki}$, la transformation de Lorentz (V.4) est une transformation orthogonale linéaire de coordonnées dans un espace à quatre dimensions. Elle décrit le passage d'un système de coordonnées $(X_1X_2X_3X_4)$ à un autre système de coordonnées $(X_1'X_2'X_3'X_4')$ tourné d'un certain angle dans le plan X_1X_4. La quantité (V.5) représente la matrice de cette transformation orthogonale linéaire.

On appelle vecteur A_i dans un espace à quatre dimensions (quadrivecteur) l'ensemble de quatre quantités A_1, A_2, A_3 et A_4 qui se

*) Dans ce chapitre, les indices de matrices et de tenseurs, désignés par des lettres latines (i, k, l, . . .) indiquent, lorsqu'ils se répètent, une sommation de 1 à 4, le signe de sommation étant omis. Quant aux indices représentés par des lettres grecques (α, β, γ, . . .), ils parcourent, comme précédemment, les valeurs de 1 à 3.

transforment lors d'une transformation orthogonale de coordonnées comme les composantes du quadrirayon vecteur

$$A_i = a_{ik}A'_k, \quad A'_i = a^{-1}_{ik}A_k, \tag{V.7}$$

où a_{ik} est la matrice de transformation orthogonale linéaire quelconque de coordonnées dans un espace à quatre dimensions. En particulier, elle peut avoir la forme de (V.5).

Pour le quadrivecteur on a adopté la notation

$$A_i = (\mathbf{A}, A_4), \tag{V.8}$$

où $A = \mathbf{1}_x A_1 + \mathbf{1}_y A_2 + \mathbf{1}_z A_3$. Les trois premières composantes A_1, A_2 et A_3 du quadrivecteur sont dites spatiales et la quatrième A_4 est temporelle.

De même, on appelle quadritenseur de rang 2 l'ensemble de seize grandeurs T_{ik} qui, lors d'une transformation orthogonale de coordonnées, se transforment comme le produit des composantes du quadrirayon vecteur

$$T_{ik} = a_{il}a_{km}T'_{lm}, \quad T'_{ik} = a^{-1}_{il}a^{-1}_{km}T_{lm}. \tag{V.9}$$

Si une grandeur quelconque ne change pas sa valeur numérique lors du passage à un système de coordonnées à quatre dimensions tourné, elle est dite scalaire. A cette condition satisfait par exemple le produit scalaire $A_iB_i = \mathbf{AB} + A_4B_4$ des quadrivecteurs A_i et B_i qui est invariant par rapport à la rotation d'un système de coordonnées à quatre dimensions

$$A_iB_i = A'_iB'_i = \text{inv.} \tag{V.10}$$

L'impulsion $\mathbf{p}$ et l'énergie $\mathscr{E}$ d'une particule de masse m

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{V.11}$$

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{V.12}$$

forment un quadrivecteur énergie-impulsion p_i (ou tout court quadriimpulsion)

$$p_i = \left(\mathbf{p},\ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right). \tag{V.13}$$

Cette grandeur est souvent représentée sous la forme $p_i = mcu_i$, en introduisant la notion de vitesse à quatre dimensions

$$u_i = \left(\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{V.14}$$

Les composantes de la quadrivitesse satisfont à la condition $u_i^2 = -1$, de sorte qu'on peut écrire

$$\mathbf{p}^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = -m^2c^2. \tag{V.15}$$

Des formules (V.11) et (V.12) on peut déduire des relations utiles suivantes

$$\mathbf{p}=\mathcal{E}\frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad \mathcal{E}=\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2}, \quad T=\mathcal{E}-mc^2, \tag{V.16}$$

où la grandeur T s'appelle énergie cinétique de la particule relativiste et la quantité mc^2 est l'énergie au repos.

En dérivant par rapport au temps les deux membres de l'égalité (V.15) et en utilisant l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}=\mathbf{F}, \tag{V.17}$$

il est facile de déterminer la variation de l'énergie cinétique de la particule dans un champ de force extérieur $\mathbf{F}$:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\mathbf{vF}. \tag{V.18}$$

A côté de la force tridimensionnelle $\mathbf{F}$ subie par la particule, on introduit la notion de quadrivecteur force f_i de composantes

$$f_i=\left(\frac{\mathbf{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ i\frac{\mathbf{vF}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{V.19}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule. La force à quatre dimensions intervient au second membre de l'équation covariante du mouvement

$$mc\frac{du_i}{ds}=f_i. \tag{V.20}$$

Ici, $ds = c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ et $du_i/ds = w_i$ est une accélération à quatre dimensions qui est orthogonale au quadrivecteur vitesse $w_iu_i = 0$ et possède les composantes suivantes:

$$w_i=$$
$$=\left(\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{i}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{V.21}$$

Les densités volumiques de courant $\mathbf{j}$ et de charge ρ forment un quadrivecteur densité de courant

$$j_i = (\mathbf{j},\ ic\rho), \tag{V.22}$$

alors que le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le potentiel scalaire φ forment un quadrivecteur

$$A_i = (\mathbf{A},\ i\varphi), \tag{V.23}$$

que l'on appelle quadripotentiel.

Les relations (IV.1) et (IV.2) qui définissent les potentiels vecteur et scalaire s'écrivent en notation quadridimensionnelle de la

façon unique

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \tag{V.24}$$

où la grandeur F_{ik} s'appelle tenseur de champ électromagnétique. Les intensités **E** et **H** des champs électrique et magnétique sont les composantes de ce tenseur antisymétrique

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{V.25}$$

En se servant du tenseur de champ électromagnétique, on peut représenter les équations de Maxwell (III.1) à (III.4) sous la forme covariante

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j_k \tag{V.26}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{V.27}$$

Les formules (V.9) et (V.25) permettent d'obtenir la loi de transformation des champs électrique et magnétique lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre (voir fig. 8)

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{V.28}$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{V.29}$$

ou encore, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}'_{\perp})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{V.30}$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}'_{\perp} + \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}'_{\perp})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{V.31}$$

où les signes $\parallel$ et $\perp$ désignent les composantes du vecteur respectivement parallèle et perpendiculaire à la vitesse **V**.

A partir des vecteurs **E** et **H** il n'est pas difficile de former des grandeurs invariantes par rapport à la transformation de Lorentz:

$$E^2 - H^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{EH} = \text{inv}. \qquad (V.32)$$

L'application des invariants (V.10) et (V.32) à une onde électromagnétique plane monochromatique

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad \mathbf{H} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})\frac{c}{\omega}, \qquad (V.33)$$

conduit à la conclusion que les vecteurs intensités des champs électrique et magnétique de cette onde sont égaux en module et orthogonaux dans tous les systèmes de référence galiléens et que la phase de l'onde est un invariant

$$\omega t - \mathbf{kr} = -k_i x_i = \text{inv}, \qquad (V.34)$$

où $k_i = \left(\mathbf{k}, \, i\frac{\omega}{c}\right)$ est un quadrivecteur d'onde.

Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{lk} + \frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}\right) \qquad (V.35)$$

possède les propriétés $T_{ik} = T_{ki}$ et $T_{ii} = 0$. Sa composante temporelle T_{44} et ses composantes spatio-temporelles $T_{\alpha 4}$ sont liées à la densité d'énergie $w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ et à la densité d'impulsion $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ du champ électromagnétique par les relations suivantes

$$T_{44} = w, \quad T_{\alpha 4} = -icg_\alpha. \qquad (V.36)$$

La densité d'impulsion **g** du champ électromagnétique est proportionnelle à la densité de flux d'énergie électromagnétique (au vecteur de Poynting $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$)

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{s}. \qquad (V.37)$$

Neuf composantes spatiales du quadritenseur (V.35) forment un tenseur de tensions de Maxwell à trois dimensions

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\delta_{\alpha\beta}\right]. \qquad (V.38)$$

La force appliquée à une surface fermée S dans un champ électromagnétique s'exprime par le tenseur de tensions de Maxwell (V.38)

$$F_\alpha = \oint_S T_{\alpha\beta} N_\beta \, dS \qquad (V.39)$$

où F_α est une composante de la force et N le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface S.

En notation quadridimensionnelle, l'équation du mouvement (V.20) d'une particule seule de masse m et de charge e dans un champ électromagnétique extérieur est de la forme

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u_k. \tag{V.40}$$

Après simplification par le vecteur commun, la partie spatiale de cette égalité vectorielle à quatre dimensions coïncide avec l'équation de Newton (V.17) dont le second membre exprime la force de Lorentz

$$\mathbf{F}=e\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right]. \tag{V.41}$$

Le champ électromagnétique d'une charge e en mouvement avec une vitesse quelconque $\mathbf{v}$ est déterminé par les potentiels de Liénard-Wiechert

$$\varphi=\frac{e}{R-\frac{\mathbf{vR}}{c}},\quad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{c\left(R-\frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{V.42}$$

où $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')$ et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}_e(t)$ sont respectivement les rayons vecteurs du point d'observation et du point d'emplacement de la charge. L'instant de temps retardé t' est lié à l'instant d'observation t par la condition

$$t'=t-\frac{1}{c}\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')\,|. \tag{V.43}$$

Par dérivation des potentiels de Liénard-Wiechert on trouve les intensités des champs électrique et magnétique d'une charge en mouvement

$$\mathbf{E}=\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)}{\left(R-\frac{\mathbf{vR}}{c}\right)^3}+\frac{e\left(\mathbf{R}\times\left(\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right)\right)}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{vR}}{c}\right)^3}, \tag{V.44}$$

$$\mathbf{H}=\frac{(\mathbf{R}\times\mathbf{E})}{R}. \tag{V.45}$$

Les champs électrique (V.44) et magnétique (V.45) se composent de deux parties caractéristiques. La première partie dépend de la vitesse de la charge ponctuelle et décroît avec la distance comme $1/R^2$. Elle se déplace avec la charge et ne se détache pas de celle-ci parce que le flux d'énergie de ce champ à travers une sphère de rayon R tend vers zéro quand $R\to\infty$. La deuxième partie dépend non seulement de la vitesse mais aussi de l'accélération, elle décroît avec la distance comme $1/R$. Il en résulte que le vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon infiniment grand devient différent de zéro. Cela signifie que la deuxième partie des champs (V.44)

et (V.45) décrit l'émission des ondes électromagnétiques par une charge en mouvement accéléré.

L'intensité de rayonnement de la charge e dans un angle solide $d\Omega$

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2(t) R^2 d\Omega \tag{V.46}$$

ne comporte que le deuxième terme de l'expression (V.44) et prend, après simplification, la forme suivante

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^6} \right\} d\Omega, \tag{V.47}$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ est un vecteur unité orienté dans le sens de propagation et les valeurs de toutes les grandeurs intervenant au second membre de l'égalité (V.47) sont prises à l'instant de temps retardé (V.43).

En vertu de leur définition même, les intensités de rayonnement (V.46) et (IV.22) diffèrent numériquement l'une de l'autre si l'on tient compte du retard que le signal électromagnétique émis présente dans les limites de la région efficace du mouvement de la charge. Cela s'explique par le fait que les flux du vecteur de Poynting à travers les surfaces sphériques de rayons suffisamment grands r et R sont, à un seul et même instant t, différents parce que les centres de ces sphères ne coïncident pas.

Si la vitesse et l'accélération d'une charge sont parallèles, la formule (V.47) prend une forme beaucoup plus simple

$$dI = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} d\Omega \tag{V.48}$$

où θ est l'angle entre la vitesse et la direction de rayonnement. Lorsque les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ sont perpendiculaires entre eux, on a

$$dI = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\psi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} \right] d\Omega. \tag{V.49}$$

Dans cette formule, θ est l'angle entre la vitesse $\mathbf{v}$ et le vecteur unité $\mathbf{n}$ orienté dans le sens de rayonnement et ψ l'angle azimutal que le vecteur $\mathbf{n}$ fait avec le plan passant par la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$ de la charge.

L'énergie totale rayonnée dans un angle solide $d\Omega$ pendant tout le temps de mouvement de la charge e est donnée par la formule

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\, d\Omega \int \left\{ \frac{2\,(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})\,(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^4} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^5} \right\} dt', \qquad \text{(V.50)}$$

qui utilise la relation

$$dt = \left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) dt'. \qquad \text{(V.51)}$$

Toute charge animée d'un mouvement accéléré rayonne des ondes électromagnétiques qui emportent une certaine énergie et une certaine impulsion. L'énergie $d\mathscr{E}_{\mathrm{ray}}$ et l'impulsion $d\mathbf{P}_{\mathrm{ray}}$ émises pendant un temps dt sont déterminées par les formules

$$d\mathscr{E}_{\mathrm{ray}} = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\, \frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{F})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt, \qquad \text{(V.52)}$$

$$d\mathbf{P}_{\mathrm{ray}} = \frac{2e^2}{3m^2c^5}\, \frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{F})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\, \mathbf{v}\, dt, \qquad \text{(V.53)}$$

où e et m sont la charge et la masse de la particule qui se déplace avec la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ de force $\mathbf{F}$ suivant l'équation de Newton (V.17).

Parfois, les seconds membres des égalités (V.52) et (V.53) s'écrivent sous une autre forme

$$d\mathscr{E}_{\mathrm{ray}} = \frac{2e^2}{3c^3}\, \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\, dt, \qquad \text{(V.54)}$$

$$d\mathbf{P}_{\mathrm{ray}} = \frac{2e^2}{3c^5}\, \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\, \mathbf{v}\, dt, \qquad \text{(V.55)}$$

où $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ sont la vitesse et l'accélération de la charge e.

Dans un champ électromagnétique extérieur d'intensités $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, la grandeur $\mathbf{F}$ coïncide, si l'on ne tient pas compte de l'action inverse du rayonnement sur la particule chargée, avec la force de Lorentz

(V.41), de sorte que les formules (V.52) et (V.53) deviennent

$$d\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt, \qquad \text{(V.56)}$$

$$d\mathbf{P}_{\text{ray}} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\, \mathbf{v}\, dt. \qquad \text{(V.57)}$$

Lors du mouvement dans un champ de force **F**, la vitesse avec laquelle la particule chargée perd de l'énergie par suite du rayonnement des ondes électromagnétiques se décrit par l'expression

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}_{\text{n}}}{dt}\right)_{\text{ray}} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vF})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad \text{(V.58)}$$

où $\mathscr{E}_{\text{n}}$ est l'énergie de la particule dans ce champ de force.

La prise en compte de la force de frottement de rayonnement dans l'équation du mouvement (V.17) peut avoir une influence importante sur le rayon vecteur $\mathbf{r}_e(t)$, la vitesse $\mathbf{v}(t)$ et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}(t)$ de la particule chargée et donc affecter les seconds membres des relations (V.47) à (V.58).

L'intensité de rayonnement totale dans toutes les directions

$$I = \frac{c}{4\pi} \int E^2(t)\, R^2\, d\Omega \qquad \text{(V.59)}$$

diffère, d'après son sens physique et sa valeur numérique, de la vitesse de la perte d'énergie par la particule chargée, due au rayonnement (V.58), bien que ces deux grandeurs aient les mêmes dimensions. Ces grandeurs ne se confondent que dans le cas limite du mouvement lent de la particule chargée avec une vitesse $v \ll c$, où le retard du signal électromagnétique rayonné peut être négligé à l'intérieur de la région efficace du mouvement. Dans ce cas limite, les formules (V.59) et (V.58) coïncident avec les expressions analogues (IV.16) et (IV.31), si ces dernières sont appliquées au rayonnement d'une charge seule.

Si le rayon vecteur $\mathbf{r}_e(t)$ de la charge e varie au cours du temps d'une façon donnée, l'énergie $d\mathscr{E}_{\text{n}\omega}$ rayonnée dans un élément d'angle solide $d\Omega$ sur les fréquences de ω à $\omega + d\omega$ est de la forme

$$d\mathscr{E}_{\text{n}\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_e(t))\, e^{i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega\, d\omega. \qquad \text{(V.60)}$$

En particulier, si la vitesse d'une particule chargée subit une brusque variation par suite d'une collision, la relation (V.60) s'écrira sous la forme

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c^3}\left(\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{v}_1}{1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_1}{c}}-\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{v}_2}{1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_2}{c}}\right)^2 d\Omega\, d\omega, \qquad (\text{V.61})$$

où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses de la particule avant et après la collision. La formule (V.61) est valable pour des fréquences $\omega\tau \ll 1$, où τ est l'ordre de grandeur du temps d'interaction qui a provoqué une brusque variation de vitesse de la particule. Dans le cas d'une modification instantanée de la vitesse, le domaine d'applicabilité de la formule (V.61) est limité par la condition de petitesse de la grandeur $\hbar\omega$ par rapport à l'énergie cinétique de la particule pour exclure les effets quantiques dans le rayonnement.

Les formules (V.60) et (V.61) admettent une généralisation au cas d'un système de charges e_m ($m = 1, 2, \ldots, N$) en mouvement sur des trajectoires données

$$d\mathscr{E}_{n\omega}=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\sum_{m=1}^{N} e_m\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_m(t))\,e^{i\omega\left(t-\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_m(t)}{c}\right)}dt\right|^2 d\Omega\, d\omega \qquad (\text{V.62})$$

$$d\mathscr{E}_{n\omega}=\frac{1}{4\pi^2c^3}\left[\sum_{m=1}^{N} e_m\left(\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{v}_{1m}}{1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_{1m}}{c}}-\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{v}_{2m}}{1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_{2m}}{c}}\right)\right]^2 d\Omega\, d\omega, \qquad (\text{V.63})$$

où $\mathbf{r}_m(t)$ est le rayon vecteur de la charge e_m et $\mathbf{v}_{1m}$ et $\mathbf{v}_{2m}$ sont ses vitesses avant et après la collision. Les seconds membres des égalités (V.62) et (V.63) tiennent compte de l'interférence des ondes électromagnétiques émises par les charges constitutives du système.

Dans le cas où la charge e est animée d'un mouvement périodique, la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega_0$ de l'intensité de rayonnement dI_n dans un élément d'angle solide $d\Omega$ sur le n-ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_0$ est égale à

$$dI_n=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{2\pi c^3}\left|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_e(t))\,e^{in\omega_0\left(t-\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)}dt\right|^2 d\Omega. \qquad (\text{V.64})$$

L'intensité totale de rayonnement dans un élément d'angle solide $d\Omega$, prise en valeur moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega_0$, vaut une somme infinie des intensités de rayonnement (V.64) sur tous les harmoniques d'indice $n = 1, 2, \ldots$

Pour un système de charges se déplaçant avec une seule et même période, la généralisation de la formule (V.64) se fait par analogie avec les relations (V.60) à (V.63). Si les périodes de mouvement des charges partielles sont différentes, la moyenne temporelle de l'intensité de rayonnement s'exprime par une formule plus compliquée.

L'action réciproque du rayonnement sur une particule chargée en mouvement avec la vitesse **v** dans un champ électromagnétique **E** et **H** est prise en compte, dans l'équation du mouvement, en ajoutant à la force de Lorentz la force spécifique **f** de frottement de rayonnement qui est dirigée en sens inverse de **v**. En choisissant cette dernière comme axe des X, on obtient dans le cas ultrarelativiste

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - v^2/c^2}. \qquad \text{(V.65)}$$

Pour des vitesses de la particule, voisines de la vitesse de la lumière, peuvent se réaliser des conditions sous lesquelles la force de frottement de rayonnement (V.65) devient force agissante principale. Dans ces cas, l'énergie d'une particule chargée après la traversée d'un champ électromagnétique extérieur ne peut pas dépasser une valeur limite $\mathscr{E}_{\text{lim}}$ donnée par l'égalité

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{lim}}} = \frac{2e^4}{3m^4c^8} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\, dx. \qquad \text{(V.66)}$$

§ 1. Transformation de champ électromagnétique

431. Les intensités **E** et **H** d'un champ électromagnétique uniforme sont données dans un système de référence galiléen fixe et de plus $\mathbf{EH} > 0$. Déterminer les vitesses **V** des référentiels galiléens dans lesquels le vecteur champ électrique et le vecteur champ magnétique sont parallèles.

432. Dans un système de référence fixe, les intensités **E** et **H** des champs électrique et magnétique sont orthogonales l'une à l'autre et ne sont pas égales en module. Déterminer les vitesses **V** des référentiels galiléens dans lesquels il n'existe que a) le champ électrique; b) le champ magnétique. Déterminer l'intensité de ces champs.

433. Les intensités **E** et **H** d'un champ électromagnétique uniforme sont données dans un certain système galiléen et $\mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq 0$. Déterminer la vitesse **V** de tous les systèmes galiléens dans lesquels le module de l'intensité du champ électrique (ou magnétique) a la même valeur numérique que dans le système donné. Représenter le résultat sous forme vectorielle.

434. Soit un cylindre homogène indéfini de rayon quelconque, parcouru par un courant constant de densité volumique **j**. Les densités volumique et superficielle de charge du cylindre sont nulles. Déterminer les vitesses **V** des systèmes galiléens en tout point desquels l'intensité du champ électrique est, en module, N fois plus faible que l'intensité du champ magnétique.

435. En se servant des formules (V.28) et (V.29) de transformation d'intensités des champs électrique et magnétique, démontrer

que la forme et la valeur numérique des grandeurs $E^2 - H^2$ et **EH** ne sont pas changées lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre.

436. Les intensités **E** et **H** des champs électrique et magnétique forment dans un référentiel galiléen donné un angle aigu. Déterminer les modules E' et H' des intensités des champs électrique et magnétique dans celui des systèmes galiléens où l'angle entre les vecteurs **E**′ et **H**′ est égal à $\pi/4$.

437. Un neutron de moment magnétique μ se déplace avec la vitesse **v** dans le champ coulombien d'un noyau fixe portant une charge Q. En considérant que la vitesse du neutron est très petite par rapport à la vitesse de la lumière et en négligeant les termes d'ordre $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, calculer la force **F** subie par le neutron en tout point de sa trajectoire.

438. Une particule électriquement neutre, possédant un moment électrique dipolaire interne **d** se déplace avec une vitesse **v** dans un champ magnétique non uniforme d'intensité **H**. En négligeant les termes proportionnels au petit paramètre $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, déterminer la force **F** subie par cette particule.

439. Soient deux référentiels galiléens dont les axes cartésiens de même nom sont parallèles et effectuent un mouvement relatif suivant l'axe des X. A l'instant $t = 0$, les origines des systèmes cartésiens sont confondues (v. fig. 8). Démontrer que la composante F_{14} du tenseur de champ électromagnétique est invariante par rapport à la transformation de Lorentz ($F_{14} = F'_{14}$) et les grandeurs F_{2k} et F_{3k} se transforment comme les vecteurs à quatre dimensions.

440. En passant aux notations à trois dimensions démontrer que les équations covariantes

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_l} = -\frac{4\pi}{c} j_k, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0$$

se réduisent aux équations de Maxwell ordinaires pour les intensités **E** et **H** du champ électromagnétique.

441. En utilisant la loi de transformation du quadrivecteur d'onde, déterminer la variation de fréquence (effet Doppler) et celle de direction de la vitesse de la lumière (aberration de la lumière) lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre. Etudier les résultats obtenus dans le cas limite $V \ll c$ où V est le module de la vitesse du mouvement relatif de deux systèmes galiléens indiqués.

442. Une onde électromagnétique plane monochromatique de fréquence ω_1 tombe sous un angle θ sur un miroir plan qui se déplace avec une vitesse **V** suivant sa normale, vers l'onde incidente. Calculer l'angle de réflexion sur le miroir en mouvement et la fréquence ω_0 de l'onde réfléchie.

443. Une onde électromagnétique plane monochromatique avec une densité d'énergie w_0 tombe suivant la normale à la surface d'un miroir plan en mouvement et s'y réfléchit totalement. Déterminer la densité d'énergie w et celle d'impulsion $\mathbf{g}$ de l'onde réfléchie si le miroir se déplace avec une vitesse $\mathbf{V}$ vers l'onde incidente.

444. Un référentiel galiléen K' se déplace avec une vitesse $\mathbf{V}$ par rapport à un autre référentiel galiléen fixe K comme l'indique la fig. 8. En utilisant la loi de transformation du tenseur d'énergie-impulsion, exprimer la densité d'énergie w' d'une onde électromagnétique plane dans le système K' par la densité d'énergie w de cette même onde dans le système fixe de coordonnées K où elle se propage sous un angle α par rapport à la vitesse $\mathbf{V}$.

445. Un ellipsoïde de révolution de demi-axes a et b présentant une surface parfaitement absorbante se déplace avec une vitesse $\mathbf{V}$ vers une onde électromagnétique incidente dont l'intensité de champ électrique est $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$. L'axe de symétrie de l'ellipsoïde, confondu avec le demi-axe b, est parallèle au vecteur $\mathbf{V}$. Déterminer dans un système de coordonnées lié à l'ellipsoïde la force $\mathbf{F}$ subie par l'ellipsoïde, en prenant sa valeur moyenne sur une période d'oscillation de l'onde. Dans le système de coordonnées indiqué, la longueur de l'onde électromagnétique incidente est petite par rapport à la dimension transversale de l'ellipsoïde, si bien que derrière celui-ci se trouve une zone d'ombre nettement marquée.

§ 2. Rayonnement d'une charge animée d'un mouvement rapide

446. Une charge e est animée d'un mouvement fini avec une vitesse non relativiste $\mathbf{v}$. En développant le potentiel vecteur de Liénard-Wiechert en série suivant le paramètre v/c et suivant le temps de retard du signal électromagnétique dans les limites de la région de déplacement de la charge, déterminer la valeur de ce potentiel et l'intensité du champ magnétique dans la zone d'onde, compte tenu des termes dont l'ordre de grandeur est v^2/c^2 fois inférieur à celui du terme principal de développement.

447. En se servant des potentiels de Liénard-Wiechert, déterminer les intensités des champs électrique et magnétique d'une charge animée d'un mouvement arbitraire.

448. En utilisant la formule générale (V.47) de la répartition angulaire de l'intensité de rayonnement d'une particule relativiste, déterminer l'intensité de rayonnement dI dans un angle solide $d\Omega$ dans deux cas où : a) la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$ de la particule sont parallèles; b) la vitesse et l'accélération de la particule sont perpendiculaires l'une à l'autre.

449. La vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$ d'une charge sont parallèles. Déterminer l'intensité totale I de rayonnement dans toutes les directions. Etudier la formule obtenue dans le cas ultrarelativiste ainsi qu'aux faibles vitesses $v^2 \ll c^2$ de la charge.

450. Une particule de masse m et de charge e se déplace parallèlement à l'intensité $\mathbf{E}$ d'un champ électrique uniforme et constant. Démontrer que la vitesse de perte d'énergie $\left(-\frac{d\mathscr{E}_n}{dt'}\right)_{\text{ray}}$ de la particule par rayonnement à l'instant de temps retardé t' a la même valeur que celle calculée à l'aide des formules (V.48) et (V.51) ainsi que de la formule (V.58). Ici, $\mathscr{E}_n$ est l'énergie de la particule dans le champ électrique extérieur.

451. Un électron de masse m et de charge e, animé d'un mouvement avec une vitesse de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière, pénètre dans un champ électrique uniforme et constant d'intensité $\mathbf{E}$. A l'instant $t_0 = 0$ d'entrée dans le champ électrique extérieur la vitesse de l'électron était perpendiculaire au vecteur $\mathbf{E}$ et son énergie était égale à $\mathscr{E}_0$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}_{\text{ray}}$ rayonnée au bout d'un temps t après la pénétration dans le champ, en la considérant comme petite par rapport à l'énergie cinétique de l'électron.

452. Un électron rapide de masse m et de charge e pénètre avec une vitesse $\mathbf{v}_0$ dans un demi-espace où règne un champ électrique d'intensité $\mathbf{E}$ uniforme et constante, parallèle au vecteur $\mathbf{v}_0$. En négligeant l'influence réciproque du rayonnement sur le mouvement de l'électron, déterminer l'énergie $\mathscr{E}_{\text{ray}}$ perdue par l'électron lors de son séjour dans le champ électrique extérieur.

453. La distance l et la différence de potentiel φ entre les armatures d'un condensateur plan sont maintenues constantes. Un proton de masse m et de charge e passe perpendiculairement aux armatures, dans le sens du vecteur intensité du champ électrique du condensateur. Sa vitesse initiale v_0 est, en valeur absolue, de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière. Calculer l'énergie $\mathscr{E}_{\text{ray}}$ rayonnée par le proton pendant la traversée du condensateur.

454. Une particule relativiste de masse m et de charge e pénètre dans un demi-espace où règne un champ magnétique dont l'intensité $\mathbf{H}$ est uniforme, constante et parallèle au plan limite. La vitesse $\mathbf{v}_0$ de la particule à l'entrée dans le champ est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{H}$ et fait avec le plan limite un angle de $\pi/4$. Déterminer l'énergie $\mathscr{E}_{\text{ray}}$ rayonnée par la particule pendant son mouvement dans le champ magnétique. Considérer deux cas où: a) la force de Lorentz est dirigée à l'instant initial vers le demi-espace occupé par le champ magnétique; b) la force de Lorentz est dirigée vers le demi-espace libre.

455. Un électron de masse m et de charge e se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme et constant d'inten-

sité **H**. A l'instant initial $t_0 = 0$ l'énergie de l'électron était $\mathcal{E}_0$ et sa vitesse $\mathbf{v}_0$ était de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière. Déduire la loi de décroissance de l'énergie $\mathcal{E}$ de l'électron, due au rayonnement. Effectuer dans la formule obtenue le passage à la limite vers une petite vitesse initiale de l'électron $v_0^2 \ll c^2$.

456. Une particule de masse m et de charge positive e se déplace à un certain moment avec une vitesse $\mathbf{v}$ parallèlement à un courant rectiligne constant d'intensité J, en passant à la distance r de ce courant. Le moment électrique dipolaire intérieur $\mathbf{d}$ de la particule est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$ et se situe dans le plan où se trouve la trajectoire et circule le courant. En négligeant les petits termes proportionnels à $v^2/c^2 \ll 1$, déterminer l'intensité I de rayonnement à cet instant.

457. Un électron de masse m et de charge e passe à une grande distance l d'un noyau immobile possédant une charge $Z\,|\,e\,|$. En négligeant la courbure de la trajectoire et en admettant que la variation de vitesse de l'électron est très petite par rapport à sa valeur initiale $\mathbf{v}_0$, déterminer l'énergie $\mathcal{E}_{\text{ray}}$ rayonnée pendant tout le temps de parcours. Montrer que dans le cas limite où $v_0^2 \ll c^2$ le résultat obtenu est le même que dans le problème 294.

458. Une particule relativiste de masse m et de charge e passe à une grande distance l d'un dipôle électrique immobile de moment $\mathbf{d}$. La variation de vitesse de la particule au cours de son mouvement est négligeable par rapport à sa valeur initiale $\mathbf{v}_0$. En négligeant la courbure de la trajectoire, déterminer l'énergie $\mathcal{E}_{\text{ray}}$ rayonnée pendant le temps de parcours dans deux cas où : a) le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ est perpendiculaire au plan de mouvement; b) le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ est parallèle à la vitesse de la particule.

459. En supposant que dans le problème précédent le moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}_0$ de la particule relativiste et se situe dans le plan de mouvement, calculer la projection de l'impulsion émise sur la direction du vecteur $\mathbf{v}_0$.

460. Un électron de masse m et de charge e passe à une grande distance l d'un neutron immobile de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$. A une distance infiniment grande du neutron, sa vitesse $\mathbf{v}_0$ est de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière. En admettant que la trajectoire de l'électron est approximativement rectiligne et que la variation de sa vitesse au cours du mouvement est très petite, déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{ray}}$ rayonnée dans deux cas où : a) le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ est perpendiculaire au plan de mouvement; b) le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ est parallèle à la vitesse de l'électron.

461. En supposant dans le problème précédent que le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du neutron est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}_0$ de l'électron et se situe dans le plan de mouvement, calculer la projection de l'impulsion rayonnée sur la direction du vecteur $\mathbf{v}_0$.

462. Une particule relativiste de masse m et de charge e passe à la distance l d'une droite indéfinie parcourue par un courant constant J. En admettant que la trajectoire de la particule est approximativement rectiligne et que sa vitesse **v** reste inchangée, déterminer l'énergie totale $\mathscr{E}_{\text{ray}}$ rayonnée pendant le trajet.

463. Une particule relativiste de masse m, de charge e et d'énergie $\mathscr{E}_0$ pénètre à l'instant initial $t_0 = 0$ dans un champ électrique uniforme et constant sous l'angle droit par rapport au vecteur **E**. En négligeant la courbure de la trajectoire, déterminer la loi de décroissance de l'énergie $\mathscr{E}$ de la particule dans l'intervalle de temps où sa vitesse est voisine de la vitesse de la lumière.

464. Une particule ultrarelativiste de masse m et de charge e se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant sous un certain angle par rapport au vecteur **H**. A l'instant initial $t_0 = 0$, son énergie est $\mathscr{E}_0$. Déterminer la loi de décroissance de l'énergie $\mathscr{E}$ de la particule dans l'intervalle de temps où sa vitesse reste voisine de la vitesse de la lumière.

465. Une particule de masse m et de charge e se déplace dans un champ de force **F** quelconque. Représenter la vitesse de perte d'énergie de la particule par rayonnement (V.58) en tant que fonction de sa vitesse **v** et de son accélération $\dot{\mathbf{v}}$.

466. Un électron de charge e, primitivement au repos, acquiert sous l'effet Compton une vitesse **v**, voisine en valeur absolue de la vitesse de la lumière. Déterminer l'énergie $d\mathscr{E}_\omega$ rayonnée par l'électron dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$.

467. En se servant de la formule générale (V.60) donnant l'énergie $d\mathscr{E}_{n\omega}$ rayonnée dans un angle solide $d\Omega$ dans l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ et en y admettant que la vitesse **v** de la charge e est petite par rapport à la vitesse de la lumière, déterminer la décomposition spectrale de l'énergie totale $d\mathscr{E}_\omega$ compte tenu des petits termes d'ordre v^2/c^2. En partant du résultat obtenu, calculer l'intensité I de rayonnement qui est définie par la formule (IV.16).

468. Une charge e effectue, à l'aide d'un certain dispositif, des oscillations harmoniques rapides $z = a \cos \omega_0 t$ suivant l'axe des Z. Déterminer l'intensité dI_n de rayonnement dans un élément d'angle solide $d\Omega$ sur le n-ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_0$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega_0$.

469. Une charge e tourne suivant une circonférence de rayon R avec une vitesse constante en module $v = R\omega_0$. Déterminer l'intensité dI_n de rayonnement dans un élément d'angle solide $d\Omega$ sur le n-ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_0$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega_0$.

470. Soient deux charges e_1 et e_2 effectuant des oscillations harmoniques $z_1 = a_1 \cos \omega_0 t$ et $z_2 = a_2 \cos \omega_0 t$ le long de deux droites infiniment voisines l'une de l'autre et parallèles à l'axe des Z. Déterminer l'intensité dI_n de rayonnement dans un élément d'angle

solide $d\Omega$ sur le n-ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_0$, en prenant sa moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$.

471. Déterminer l'énergie limite $\mathcal{E}_{\text{lim}}$ que peut avoir un électron de masse m et de charge e après avoir traversé, avec un paramètre d'impact l, un champ coulombien dû à une charge immobile Q/r.

472. Déterminer l'énergie limite $\mathcal{E}_{\text{lim}}$ que peut avoir un proton ultrarelativiste de masse m et de charge e après avoir traversé avec un paramètre d'impact l le champ magnétique terrestre caractérisé par un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$. Ce dernier est perpendiculaire au plan de mouvement du proton.

473. Une particule de masse m et de charge e est passée avec un paramètre d'impact l près d'un dipôle électrique immobile de moment $\mathbf{d}$. Le vecteur $\mathbf{d}$ est parallèle à la vitesse de la particule. Déterminer l'énergie limite $\mathcal{E}_{\text{lim}}$ que peut avoir la particule après son passage.

474. Une particule ultrarelativiste de masse m et de charge e passe à une distance l d'un fil rectiligne indéfini chargé avec une densité linéique constante q. Sa vitesse est perpendiculaire au fil. Déterminer l'énergie limite $\mathcal{E}_{\text{lim}}$ que peut avoir la particule après le passage près du fil chargé.

475. Une particule relativiste de masse m et de charge e passe à une distance l de l'axe d'un cylindre indéfini parcouru par un courant constant J. Le rayon du cylindre est inférieur à l. Déterminer l'énergie limite $\mathcal{E}_{\text{lim}}$ que la particule peut acquérir après avoir traversé le champ magnétique produit par ce courant.

RÉPONSES AUX EXERCICES ET SOLUTIONS

CHAPITRE PREMIER

CHAMP ÉLECTRIQUE STATIQUE

§ 1. Equations de Maxwell et conditions aux limites en électrostatique

1. a) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$; b) $(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} - 2\,(\mathbf{ak})\,\mathbf{r} + (\mathbf{kr})\,\mathbf{a}$; c) $(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} \sin \mathbf{kr} - \mathbf{a} \cos \mathbf{kr}$; d) $\frac{3\,(\mathbf{dr})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}$; e) $-\left[\frac{df(r)}{dr} F(r) + f(r) \frac{dF(r)}{dr}\right] \frac{\mathbf{r}}{r}$; f) $-\frac{dF}{df} \frac{df}{d\,(\mathbf{ar})}\mathbf{a}$.

2. Non, parce que le rotationnel de la fonction vectorielle donnée est non nul : $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 2\mathbf{a}$.

3. L'intensité du champ électrostatique à l'intérieur de la cavité doit satisfaire aux équations homogènes de Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Aussi, pour répondre à la question posée faut-il calculer le rotationnel et la divergence du champ donné :

a) oui, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$) ; b) non, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{ab}$) ; c) oui, si $\mathbf{ab} = 0$ ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 3\mathbf{ab}$) ; d) non, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$; $\operatorname{div} \mathbf{E} = -2\mathbf{ab}$) ; e) non, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 3\,(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} - (\mathbf{ak})\,\mathbf{r}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{a}\,(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$) ; f) non, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 3\,(\mathbf{r} \times \mathbf{c})$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = -2\,(\mathbf{cr})$) ; g) non, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cos \mathbf{kr} - (\mathbf{br})\,(\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \times \sin \mathbf{kr}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{ab} \cos \mathbf{kr} - (\mathbf{ak})\,(\mathbf{br}) \sin \mathbf{kr}$) ; h) oui, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$; i) oui, ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$).

4. a) $\frac{b^2}{4\pi}$; b) $\frac{gr}{\pi}$; c) $\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$; d) $\rho_0 \cos \theta$ pour $r < R$ et 0 pour $r > R$; e) $\rho_0 \cos \psi$ pour $r < R$ et 0 pour $r > R$.

6. Non.

7. Indication. Utiliser le théorème de Stokes (A1.17) et l'équation électrostatique (I.1).

8. La charge de densité superficielle σ est portée par les surfaces suivantes: a) plan cartésien XY avec $\sigma = E_0/2\pi$; b) sphère de rayon R avec $\sigma = Q/4\pi R^2$; c) surface cylindrique de rayon R avec $\sigma = q/4\pi R$.

§ 2. Théorème électrostatique de Gauss

9. a) L'intensité **E** du champ électrique produit par une sphère uniformément chargée est dirigée suivant le rayon, et le module du vecteur **E** dépend de la distance r au centre de la sphère. Ces conclusions découlent de la symétrie sphérique que présente la disposition des charges. Comme surface auxiliaire dans le théorème électrostatique de Gauss, il convient de choisir une sphère concentrique parce que la fonction placée sous le signe somme $E = E(r)$ est constante dans cette sphère et on peut donc la faire sortir sous le signe de l'intégrale

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E.$$

En partant du théorème de Gauss, on obtient pour l'intérieur de la sphère

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{16\pi^2}{3} r^3 \rho, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r},$$

et pour l'extérieur

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{16\pi^2}{3} R^3 \rho, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Le potentiel du champ électrique se calcule par résolution de l'équation

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -E(r),$$

dont le second membre est égal à $E_1(r)$ à l'intérieur de la sphère et à $E_2(r)$ à l'extérieur. L'intégration de cette équation donne

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} \rho r^2 + c_1 \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho R^3}{r} + c_2 \quad \text{pour } r \geqslant R.$$

Les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont déterminées à partir des conditions supplémentaires $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, $\varphi_2(\infty) = 0$.

Finalement, le potentiel du champ électrique prend la forme

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho R^2}{3} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} + c_2 \quad \text{pour } r \geqslant R;$$

b) $$\mathbf{E}_1 = 2\pi\rho \mathbf{r}, \quad \varphi_1 = \pi\rho(R^2 - r^2) \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2\pi\rho R^2 \mathbf{r}}{r^2}, \quad \varphi_2 = 2\pi\rho R^2 \ln \frac{R}{r} \quad \text{pour } r \geqslant R,$$

où le rayon vecteur **r** du point d'observation est orienté suivant le rayon du cylindre et la constante arbitraire entrant dans le potentiel est choisie à partir de la condition $\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = 0$.

c) $\mathbf{E}_1 = 4\pi\rho x \mathbf{1}_x$, $\quad \varphi_1 = -2\pi\rho x^2 \quad$ pour $|x| \leqslant L$,

$$\mathbf{E}_2 = 4\pi\rho L \frac{x}{|x|} \mathbf{1}_x, \quad \varphi_2 = 2\pi\rho L (L - 2|x|) \quad \text{pour } |x| \geqslant L.$$

L'origine du système de coordonnées cartésiennes se situe sur le plan de symétrie de la plaque et l'axe des X est perpendiculaire à la plaque. La constante arbitraire figurant dans le potentiel est choisie à partir de la condition $\varphi_1(0) = 0$.

10. a) $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 4\pi R\sigma$ pour $r < R$, $\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi R^2\sigma \mathbf{r}}{r^3}$, $\varphi_2 = \frac{4\pi R^2\sigma}{r}$ pour $r > R$; b) $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ pour $r < R$, $\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi\sigma R \mathbf{r}}{r^2}$, $\varphi_2 = 4\pi\sigma R \ln \frac{R}{r}$ pour $r > R$; c) $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \frac{x}{|x|} \mathbf{1}_x$, $\varphi = -2\pi\sigma |x|$, où x est la coordonnée du point d'observation comptée à partir du plan chargé.

11. $\Phi = \pi^2 a R^8 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. $\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}\left[1 + \frac{2r}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] e^{-2r/a}$; $\quad \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}$ pour $r \ll a$, $\mathbf{E} = \frac{2e\mathbf{r}}{a^2 r} e^{-2r/a}$ pour $r \gg a$.

13. $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r\, dr$ pour $r \leqslant R_1$; $\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi \mathbf{r}}{r^3} \int_{R_1}^{r} \rho(\xi)\xi^2 d\xi$, $\varphi_2 = 4\pi \left(\int_r^{R_2} \rho(\xi)\, \xi\, d\xi + \frac{1}{r}\int_{R_1}^{r} \rho(\xi)\, \xi^2\, d\xi\right)$ pour $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; $\mathbf{E}_3 = \frac{4\pi \mathbf{r}}{r^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r^2\, dr$, $\varphi_3 = \frac{4\pi}{r} \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r^2\, dr \quad$ pour $r \geqslant R_2$.

14. $\mathbf{E} = \frac{4\pi \mathbf{r}}{r^2} \int_0^r \rho(\xi)\, \xi\, d\xi$, $\varphi = 4\pi \int_r^R \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \rho(\xi)\, \xi\, d\xi\, d\eta$.

15. $\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{1}_x \int_0^x \rho(|\xi|)\, d\xi$, $\varphi = 4\pi \int_0^x (\xi - x)\, \rho(|\xi|)\, d\xi$.

16. Considérons un corps formé par révolution d'une ligne de force autour de l'axe des X. Supposons que cette ligne relie entre elles les deux charges. Alors, le flux de l'intensité du champ élec-

trique résultant à travers toute section transversale du corps de révolution obtenu prend une seule et même valeur numérique. Ce flux peut être exprimé par la charge e_1 ou e_2, si la surface de la section transversale est contractée d'abord vers le point d'emplacement de la charge e_1 et puis vers e_2. En égalant entre elles les deux expressions, on obtient

$$2\pi e_1 (1-\cos\theta_1) = 2\pi \mid e_2 \mid (1-\cos\theta_2),$$

$$\theta_2 = 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{e_1}{\mid e_2 \mid}} \sin\frac{\theta_1}{2} \right).$$

L'ensemble des lignes de force aboutissant à la charge e_2 forme un corps de révolution qui touche la surface d'un cône circulaire droit d'angle θ_0 au sommet qui est le point d'emplacement de la charge e_1. L'angle θ_0 est déterminé à partir de la relation

$$2\pi e_1 (1 - \cos\theta_0) = 4\pi \mid e_2 \mid.$$

La première ligne de force, qui part de la charge e_1 et se termine dans le plan XY à l'infini, est tangente à la surface du corps de révolution mentionné ci-dessus. On a donc

$$\theta_0 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\mid e_2 \mid}{e_1}}.$$

Si l'on suppose que $\theta_\infty \neq 0$, la ligne de force, qui se termine dans le plan XY à l'infini, se situe à des distances suffisamment grandes des charges sur la surface d'un cône circulaire droit d'angle θ_∞ au sommet. A l'intérieur de ce cône, les lignes de force n'existent pas parce qu'il est formé par la révolution de la première ligne de force qui s'en va vers l'infini. D'autre part, à très grandes distances, le champ électrique produit par un système de deux charges coïncide, avec un haut degré de précision, avec le champ dû à une seule charge ponctuelle de valeur $e_1 + e_2$, ce dernier champ présentant une symétrie sphérique. La contradiction ainsi obtenue amène à la conclusion que $\theta_\infty = 0$.

17. $\psi_1 = \frac{\mid q_2 \mid}{q_1} \psi_2, \quad \psi_0 = \frac{\pi \mid q_2 \mid}{q_1}.$

18. $e_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} e_1.$

19. La distribution volumique de charge se détermine à partir de l'équation de Maxwell $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$ partout, sauf pour le point $\mathbf{r} = 0$ qui est un point singulier. Ce point porte une charge ponctuelle parce que l'intensité du champ électrique tend vers l'infini, de même que $1/r^2$, quand $r \to 0$. La valeur de la charge ponctuelle peut être calculée d'après le théorème de Gauss si l'on contracte la surface

sphérique fermée auxiliaire vers le point $\mathbf{r} = 0$. On obtient finalement

$$\rho = e\left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{b^2}{4\pi r} e^{-br}\right], \quad Q = 0.$$

20. $$\mathbf{E} = 2q\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{l}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\right), \quad \varphi = 2q \ln \frac{r}{|\mathbf{r}-\mathbf{l}|};$$

$$\mathbf{E} = 2q\left(\frac{2(\mathbf{lr})\,\mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{l}}{r^2}\right), \quad \varphi = \frac{2q(\mathbf{lr})}{r^2} \quad \text{pour} \quad r \gg l.$$

Ici, $\mathbf{l}$ est le vecteur porté du fil négatif vers le fil positif. L'origine du rayon vecteur $\mathbf{r}$ se situe sur le fil négatif auquel il est perpendiculaire.

21. $\mathbf{E} = 2\pi\sigma\left(\frac{x}{|x|}\mathbf{1}_x + \frac{y}{|y|}\mathbf{1} + \frac{z}{|z|}\mathbf{1}_z\right)$. Les axes de coordonnées cartésiennes sont confondus avec les lignes d'intersection des plans chargés.

22. Sans modifier le champ électrique produit par le système de charges donné, remplissons la cavité d'une charge positive avec une densité volumique ρ et d'une charge négative avec une densité volumique $-\rho$. Nous obtiendrons deux sphères uniformément chargées dont la plus grande sera positive et la plus petite, négative. Suivant le principe de superposition, l'intensité du champ électrique à l'intérieur de la plus petite sphère sera égale à la somme des intensités engendrées séparément par la sphère positive

$$\mathbf{E}_+ = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{r}$$

et par la sphère négative

$$\mathbf{E}_- = -\frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{r}'.$$

Ici, $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont les rayons vecteurs tracés vers le point d'observation depuis les centres des petite et grande sphères. L'intensité $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ du champ électrique est uniforme et a pour valeur

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{l}$$

où $\mathbf{l}$ est un vecteur ayant le centre de la sphère donné pour origine et le centre de la cavité pour extrémité. Son module est égal à la distance entre ces centres. Le champ électrique trouvé existe aussi à l'intérieur de la cavité avant son remplissage avec des charges positive et négative.

23. $\mathbf{E} = 2\pi\rho\mathbf{l}$ où $\mathbf{l}$ est un vecteur mené de l'axe du cylindre vers l'axe de la cavité.

24. $\mathbf{E} = 2\pi\sigma\mathbf{n} - 2a\sigma\mathbf{r}/r^2$, où $\mathbf{n}$ est la normale au plan chargé orientée vers le point d'observation, r la distance du point d'observation à l'axe de la fente, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur perpendiculaire à cet axe.

§ 3. Application de la solution générale de l'équation de Poisson

25. $\varphi = 2\pi\sigma\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right)$, $E_x = E_y = 0$,

$$E_z = 2\pi\sigma\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right); \quad \varphi = \frac{\pi R^2\sigma}{|z|}, \quad E_z = \frac{\pi R^2\sigma z}{|z|^3}$$

pour $|z| \gg R$.

La coordonnée z est comptée à partir du plan du disque.

26. $\mathbf{E} = 2\pi z\left(\frac{2\rho}{3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\mathbf{1}_z$ pour $|z| \leqslant R$;

$$\mathbf{E} = 2\pi z\left(\frac{2R^3\rho}{3|z|^3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\mathbf{1}_z \quad \text{pour } |z| \geqslant R.$$

La coordonnée z est comptée à partir du centre de la sphère.

27. $\varphi = q \ln\left|\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2+z^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2+z^2}}\right|$.

28. $\varphi = \pi\rho\Big[(z+h)\sqrt{(z+h)^2+R^2} - (z-h)\sqrt{(z-h)^2+R^2} -$

$$-2(z^2+h^2) + R^2 \ln\left|\frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}}\right|\Big] \quad \text{pour } |z| \leqslant h;$$

$$\varphi = \pi\rho\Big[(z+h)\sqrt{(z+h)^2+R^2} - (z-h)\sqrt{(z-h)^2+R^2} -$$

$$-4h|z| + R^2 \ln\left|\frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}}\right|\Big] \quad \text{pour } |z| \geqslant h.$$

L'origine des coordonnées est au centre du cylindre. Après le passage à la limite quand $R \to 0$ et $\pi R^2\rho \to q$, le potentiel extérieur prend la forme

$$\varphi = q \ln\frac{|z|+h}{|z|-h},$$

ce qui coïncide avec le potentiel du champ électrique produit par un tronçon disposé sur l'axe des Z entre les points $z_1 = -h$ et $z_2 = h$ et uniformément chargé avec une densité linéique q.

29. a) $\varphi = \frac{2\pi Rq}{\sqrt{z^2+R^2}}$, où z est la distance au plan de l'anneau;

b) $\varphi = 2\pi R\sigma \ln\left|\frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}}\right|$, où l'origine des coordonnées est au centre de la surface cylindrique;

c) $\varphi = 2\pi\sigma\left(\sqrt{z^2+R_2^2} - \sqrt{z^2+R_1^2}\right)$, où z est la distance au plan portant les charges;

d) $\varphi=\frac{2\pi\sigma R}{z}\left(\sqrt{z^2+R^2}-|z-R|\right)$, où la coordonnée z est comptée à partir du centre de l'hémisphère;

e) $$\varphi=\frac{2\pi\rho}{3z}\left[(z^2+R^2)^{3/2}-2z^3+\frac{3R^2z}{2}-R^3\right] \quad \text{pour} \quad 0\leqslant z\leqslant R,$$

$$\varphi=\frac{2\pi\rho}{3z}\left[(r^2+R^2)^{3/2}-z^3-\frac{3R^2z}{2}+R^3\right] \quad \text{pour} \quad z\geqslant R,$$

$$\varphi=\frac{2\pi\rho}{3z}\left[(z^2+R^2)^{3/2}+z^3+\frac{3R^2z}{2}-R^3\right] \quad \text{pour} \quad z\leqslant 0,$$

où la coordonnée z est comptée à partir du centre de la sphère tronquée.

30. $$\varphi=2\pi\sigma\left[\frac{R}{z}\left(\sqrt{z^2+R^2}-|z-R|\right)-\sqrt{z^2+R^2}\right],$$

$$\varphi=\pi\sigma z \qquad \text{pour} \quad |z|\ll R,$$

$$\varphi=-2\pi\sigma|z| \quad \text{pour} \quad |z|\gg R.$$

31. $\mathbf{E}=\frac{\pi\rho_0}{a}(1-e^{aR})\,\mathbf{1}_z$. Le vecteur unitaire $\mathbf{1}_z$ est dirigé suivant l'axe de symétrie vers la convexité de l'hémisphère.

32. Choisissons l'origine des coordonnées au centre de la sphère. Si le point d'observation de coordonnées sphériques r, θ et ψ se situent à l'intérieur de la sphère, divisons, dans l'intégrale (I.11), le domaine d'intégration par rapport à la variable r' en deux domaines: $0\leqslant r'\leqslant r$ et $r\leqslant r'\leqslant R$. Utilisons pour le premier le développement (A5.11) et, pour le deuxième, le développement (A5.12). Pour évaluer le potentiel à l'extérieur de la sphère, on se servira du développement (A5.12). Il vient finalement

$$\varphi_1(r,\theta)=\pi\rho_0 r\left(\frac{4}{3}R-r\right)\cos\theta \quad \text{pour} \quad r\leqslant R,$$

$$\varphi_2(r,\theta)=\frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^2}\cos\theta \qquad \text{pour} \quad r\geqslant R.$$

33. Choisissons les axes des X et Y du système de coordonnées cartésiennes dans le plan de l'anneau et plaçons l'origine des coordonnées à son centre. Le potentiel en un point d'observation quelconque de rayon vecteur $\mathbf{r}$ est

$$\varphi(\mathbf{r})=\oint\frac{q\,dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{1}$$

où l'intégrale est prise sur la longueur de la circonférence de rayon R situé dans le plan XY et ayant son centre à l'origine des coordonnées. Pour le domaine $r>R$ on se servira du développement (A5.11). Alors, le potentiel (1) en un point d'observation quelconque de coor-

données sphériques r, θ et ψ sera représenté par la double somme

$$\varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi q Y_{lm}^{*}(\theta, \psi)}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \int_{0}^{2\pi} Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \psi'\right) d\psi'.$$

Si l'on tient compte des formules (A5.9) et (A5.8), cette dernière expression prend une forme plus simple

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(0)\, P_l(\cos\theta).$$

La valeur du polynôme de Legendre au point zéro est donnée par les formules (A4.6) et (A4.7), si bien que pour le domaine $r > R$ on obtient finalement

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} P_{2k}(\cos\theta).$$

Pour $r < R$, on trouve de façon analogue

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} P_{2k}(\cos\theta).$$

Le potentiel trouvé ne dépend pas de l'angle d'azimut ψ, ce qui signifie qu'il possède une symétrie axiale. Aux points sur l'axe de l'anneau ($r = |z|$, $\theta = 0$) il s'exprime par des séries

$$\varphi = \frac{2\pi R q}{|z|} \left[1 + \frac{R^2}{z^2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{R^2}{z^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \dots\right]$$

pour $|z| > R$,

$$\varphi = 2\pi q \left[1 + \frac{z^2}{R^2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{R^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \dots\right]$$

pour $|z| < R$,

qui représentent le développement des fonctions suivantes:

$$\varphi = \frac{2\pi R q}{|z|} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \quad \text{pour} \quad |z| > R,$$

$$\varphi = \frac{2\pi q}{\sqrt{1 + z^2/R^2}} \quad \text{pour} \quad |z| < R.$$

Ces dernières expressions coïncident avec le potentiel sur l'axe de l'anneau trouvé dans le problème 29, a).

34. $$\varphi=\frac{Q}{R}+\frac{Q}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$$

pour $r\leqslant R$

$$\varphi=\frac{Q}{r}+\frac{Q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$$

pour $r\geqslant R$.

35. $$\varphi=\frac{Q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta),$$

$$E_r=\frac{Q}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)(2k)!}{2^{2k}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta),$$

$$E_\theta=\frac{Q}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k-1}(k-1)!(k+1)!}\times$$

$$\times\left(\frac{R}{r}\right)^{2k}\frac{P_{2k-1}(\cos\theta)-\cos\theta P_{2k}(\cos\theta)}{\sin\theta},$$

$$E_\varphi=0$$

36. On divisera le domaine d'intégration dans l'intégrale (I.11) en deux domaines: $0\leqslant r'\leqslant r$ et $r\leqslant r'\leqslant R$. Pour le premier domaine est valable le développement (A5.11) et pour le deuxième, celui (A5.12). On obtient finalement

$$\varphi=\pi\rho R^2\left\{1-\frac{r^2}{3R^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(2k-1)k!(k+1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{4k+3}{2(k+2)}\left(\frac{r}{R}\right)^2-\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\right]P_{2k+1}(\cos\theta)\right\}.$$

§ 4. Force et énergie en électrostatique

37. $F=\dfrac{Q^2}{8R^2}$.

38. Plaçons l'origine du système de coordonnées cartésiennes au centre de la sphère. La force qui s'applique à la moitié supérieure de la sphère s'exprime par le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de tensions de Maxwell:

$$F_z=\int_{S_0}T_{3\beta}n_\beta\,dS+\int_{S_1}T_{3\beta}n_\beta\,dS$$

où S_0 et S_1 sont la base et la surface de l'hémisphère. Les autres composantes de la force sont nulles: $F_x = F_y = 0$. En intégrant sur la base, il faut avoir en vue que les vecteurs $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}$ et $\mathbf{n}$ sont orthogonaux entre eux:

$$\int_{S_0} T_{3\beta} n_\beta \, dS = \frac{1}{8\pi} \int_{S_0} E^2 \, dS = \frac{Q^2}{16R^2}.$$

Or, sur la surface de l'hémisphère, les vecteurs $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$ et $\mathbf{n}$ sont parallèles et donc

$$\int_{S_1} T_{3\beta} n_\beta \, dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \int_{S_1} n_3 \, dS = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

Il en résulte

$$F_z = \frac{3Q^2}{16R^2}.$$

Un autre procédé de calcul:

$$F_z = \rho \int E_z \, dV = \frac{4\pi}{3} \rho^2 \int r n_3 \, dV = \frac{3Q^2}{16R^2},$$

où l'intégrale est prise sur la moitié supérieure de la sphère.

39. La valeur absolue de la force cherchée est de la forme:

$$F = \frac{4\pi}{3} \rho^2 R^3.$$

40. $W = \frac{3Q^2}{5R}$.

41. $W = \frac{Q^2}{2R}$, $Q = 4\pi R^2 \sigma$.

42. Si on élimine la petite sphère, la grande sphère présentera une cavité où le champ électrique sera uniforme:

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{l},$$

le vecteur $\mathbf{l}$ étant orienté dans le sens du centre de la grande sphère vers le centre de la cavité (v. problème 22). D'où la force de répulsion mutuelle des sphères

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho Q \mathbf{l}.$$

Pour évaluer le potentiel du champ électrique à l'intérieur de la cavité indiquée, on utilisera la même méthode de résolution que pour le problème 22. Le potentiel sera alors égal à la somme des potentiels produits séparément par les sphères positive et négative:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{3} \rho (3R_2^2 - r^2) - \frac{2\pi}{3} \rho (3R_1^2 - r'^2) =$$
$$= \frac{2\pi}{3} \rho [3(R_2^2 - R_1^2) + l^2 - 2\mathbf{rl}],$$

où **r** et **r'** sont les rayons vecteurs menés au même point d'observation à partir des centres de la sphère et de la cavité et **r** — **r'** = **1**.

L'énergie d'interaction cherchée représente l'énergie potentielle de la charge Q dans le champ extérieur φ (**r**) produit par la grande sphère

$$U = \frac{2\pi}{3} \rho Q [3(R_2^2 - R_1^2) - l^2].$$

43. $\mathbf{F} = 2\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 \mathbf{l}$, $U = \pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 (R_2^2 - R_1^2 - l^2)$, où le vecteur **1** est dirigé de l'axe du cylindre extérieur vers celui du cylindre intérieur. Son module est égal à la distance entre les axes des cylindres.

44. $\varphi = e\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) e^{-2r/a}$; $\varphi = \frac{e}{r}$ pour $r \ll a$,

$\varphi = \frac{e}{a} e^{-2r/a}$ pour $r \gg a$; $U = -\frac{e^2}{a}$, $W = \frac{5e^2}{16a}$.

45. $U = 2\pi R\sigma e\left(\sqrt{5 - 4\cos\theta_0} - 1\right)$.

46. $\mathbf{F} = 2\pi\rho e h\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right) \mathbf{1}_z$. Le vecteur unitaire $\mathbf{1}_z$ est dirigé suivant l'axe du cône de la base vers le sommet.

47. $U = 2\pi R\sigma e$.

48. $U = \frac{3Qe}{2R}$. La valeur de U restera inchangée si la charge Q est uniformément répartie en volume de la sphère.

49. $U = -\frac{e^2}{9a}$.

§ 5. Equations de Laplace et de Poisson avec conditions supplémentaires

50. On définira dans l'espace deux domaines de $z \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$ dont les potentiels $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, z)$ satisfont aux équations

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

et aux conditions aux limites dans le plan XY:

$$\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2(x, y, 0)}{\partial z} = 4\pi\sigma_0 \cos(ax + by),$$

$$\varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0).$$

Le potentiel cherché

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) & \text{pour } z \leqslant 0, \\ \varphi_2(x, y, z) & \text{pour } z \geqslant 0 \end{cases}$$

décroît quand $|z| \to \infty$ parce que la charge superficielle totale est nulle. Puisque la condition à la limite dans le plan XY est périodi-

que et la fonction cos $(ax+by)$ se reproduit quand on lui applique l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, il faut chercher les potentiels sous la forme

$$\varphi_1 = f_1(z)\cos(ax+by), \quad \varphi_2 = f_2(z)\cos(ax+by).$$

En introduisant ces fonctions dans l'équation de Poisson et en simplifiant par le facteur commun, on obtient

$$\frac{d^2 f_1}{dz^2}-\lambda^2 f_1=0, \quad \frac{d^2 f_2}{dz^2}-\lambda^2 f_2=0,$$

où $\lambda=\sqrt{a^2+b^2}$. La solution de ces dernières équations doit décroître quand $|z|\to\infty$. Par cette voie, les potentiels sont déterminés aux facteurs constants près:

$$\varphi_1 = a_1 e^{\lambda z}\cos(ax+by), \quad \varphi_2 = a_2 e^{-\lambda z}\cos(ax+by).$$

Les facteurs constants a_1 et a_2 se déterminent par les conditions aux limites. Il vient en définitive:

$$\varphi=\frac{2\pi\sigma_0}{\lambda}e^{-\lambda|z|}\cos(ax+by).$$

51. Le potentiel cherché est égal à la somme des potentiels produits par chaque plan chargé (principe de superposition). Aussi, suffit-il d'étudier le champ engendré par un seul plan chargé. Les potentiels dus à deux autres plans chargés se calculent par un simple changement de coordonnées du point d'observation. La méthode de calcul du potentiel du champ électrique produit par un seul plan chargé est exposée dans le problème précédent. On a finalement

$$\varphi=\frac{2\pi\sigma_0}{\lambda}[e^{-\lambda|z|}\sin a_1x\sin b_1y+ \\ + e^{-\lambda|y|}\sin a_2x\sin b_2z+e^{-\lambda|x|}\sin a_3y\sin b_3z]$$

52. Le champ électrique produit par une distribution périodique de charge dans un domaine illimité est aussi périodique dans tout l'espace. De plus, ce champ devient nul si l'on pose $\rho_0=0$. C'est pourquoi, le potentiel cherché est déterminé comme solution particulière de l'équation de Poisson

$$\varphi=\frac{4\pi\rho_0}{l_1^2+l_2^2+l_3^2}=\sin l_1x\sin l_2y\sin l_3z$$

L'intensité du champ électrique est calculée au moyen de la formule (I.6):

$$\mathbf{E}=-\frac{4\pi\rho_0}{l_1^2+l_2^2+l_3^2}(l_1\cos l_1x\sin l_2y\sin l_3z\mathbf{1}_x+ \\ + l_2\sin l_1x\cos l_2y\sin l_3z\mathbf{1}_y+l_3\sin l_1x\sin l_2y\cos l_3z\mathbf{1}_z).$$

53. Le potentiel

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 \text{ pour } z \leqslant 0, \\ \varphi_2 \text{ pour } z \geqslant 0. \end{cases}$$

est solution des équations

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos \mathbf{kr}, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

complétées de conditions supplémentaires

$$\frac{\partial \varphi_1 (x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2 (x, y, 0)}{\partial z}, \quad \varphi_1 (x, y, 0) = \varphi_2 (x, y, 0), \qquad (1)$$

$$|\varphi_1 (x, y, -\infty)| < \infty, \quad |\varphi_2 (x, y, \infty)| < \infty. \qquad (2)$$

Les deux dernières conditions résultent du fait que les charges ponctuelles et linéaires sont absentes alors que la charge totale est nulle. Puisque

$$\cos \mathbf{kr} = \cos (k_1 x + k_2 y) \cos k_3 z - \sin (k_1 x + k_2 y) \sin k_3 z,$$

le problème considéré admet la séparation des variables

$$\varphi_1 = f_1 (z) \cos (k_1 x + k_2 y) + F_1 (z) \sin (k_1 x + k_2 y) + \frac{4\pi\rho_0}{k^2} \cos \mathbf{kr},$$

$$\varphi_2 = f_2 (z) \cos (k_1 x + k_2 y) + F_2 (z) \sin (k_1 x + k_2 y),$$

où le dernier terme du potentiel φ_1 est une solution particulière de l'équation de Poisson. Les fonctions $f_i (z)$ et $F_i (z)$ ($i = 1, 2$) satisfont à une seule et même équation

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2} - \lambda^2 f_i = 0,$$

dans laquelle $\lambda = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. En tenant compte de la condition (2) on obtient

$$f_1 (z) = a_1 e^{\lambda z}, \quad F_1 (z) = b_1 e^{\lambda z},$$
$$f_2 (z) = a_2 e^{-\lambda z}, \quad F_2 (z) = b_2 e^{-\lambda z}.$$

Les facteurs constants se déterminent par les conditions aux limites (1), si bien qu'en définitive on trouve

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho_0}{k^2} \left\{ 2 \cos \mathbf{kr} + \left[\frac{k_3}{\lambda} \sin (k_1 x + k_2 y) - \cos (k_1 x + k_2 y) \right] e^{\lambda z} \right\}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\rho_0}{k^2} e^{-\lambda z} \left[\cos (k_1 x + k_2 y) + \frac{k_3}{\lambda} \sin (k_1 x + k_2 y) \right].$$

54. Si la distribution de charge dans tout l'espace est paire ou impaire par rapport à l'une quelconque des coordonnées cartésiennes, le potentiel présente la même parité. Dans le cas considéré, $\varphi (x, y, -z) = -\varphi (x, y, z)$.

Le problème est résolu par la méthode de séparation des variables *)

$$\varphi(x, y, z) = f(z) \sin l_1 x \sin l_2 y,$$

où $f(z)$ est une fonction impaire qui satisfait aux équations

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \lambda^2 f = 0 \qquad \text{pour } |z| > a,$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \lambda^2 f = -4\pi\rho_0 \sin l_3 z \quad \text{pour } |z| < a$$

dans lesquelles $\lambda = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$. Puisque la charge totale de la plaque est nulle, la fonction $f(z)$ décroît quand $|z| \to \infty$. Compte tenu de ce qui précède, on trouve

$$f(z) = b_1 e^{\lambda(z+a)} \qquad \text{pour} \quad z \leqslant -a,$$

$$f(z) = b_2 (e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) + \frac{4\pi\rho_0 \sin l_3 z}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant a,$$

$$f(z) = -b_1 e^{-\lambda(z-a)} \qquad \text{pour} \quad z \geqslant a.$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites (I.8) et (I.9). On obtient finalement

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left[\left(\sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a - \sin l_3 a \right] \times$$
$$\times e^{\lambda(z+a)} \sin l_1 x \sin l_2 y \ (z \leqslant -a),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left[\sin l_3 z - e^{-\lambda a} \left(\sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) \operatorname{sh} \lambda z \right] \sin l_1 x \sin l_2 y$$
$$(|z| \leqslant a),$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 \left[\sin l_3 a - \left(\sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a \right] \times$$
$$\times e^{-\lambda(z-a)} \sin l_1 x \sin l_2 y \ (z \geqslant a),$$

où on a noté $\varphi_0 = 4\pi\rho_0/(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$.

55. Si la distribution de charges présente une symétrie déterminée, le potentiel possède la même propriété. Le problème considéré est à symétrie axiale. Cela signifie que le potentiel cherché ne dépend pas de l'angle d'azimut ψ.

Désignons les potentiels à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère par $\varphi_1 = \varphi_1(r, \theta)$ et $\varphi_2 = \varphi_2(r, \theta)$. Ils satisfont aux équations

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos\theta, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \tag{1}$$

et aux conditions aux limites sur la surface de la sphère

$$\frac{\partial \varphi_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2(R, \theta)}{\partial r}, \quad \varphi_1(R, \theta) = \varphi_2(R, \theta). \tag{2}$$

*) La description de la méthode de séparation des variables sous sa forme générale peut être trouvée par exemple dans l'ouvrage [7].

En appliquant la méthode de séparation des variables, il faut tenir compte du fait que la fonction $\cos\theta$ se reproduit quand on lui applique la partie angulaire du laplacien en coordonnées sphériques (A1.46):

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right)=-\frac{2}{r^2}\cos\theta.$$

Il est donc logique de poser

$$\varphi_1 = F_1(r)\cos\theta,\quad \varphi_2 = F_2(r)\cos\theta.$$

Alors, en simplifiant les deux membres des équations et des conditions supplémentaires par le facteur $\cos\theta$, on obtient un problème plus simple pour les fonctions radiales $F_1(r)$ et $F_2(r)$. Conformément aux équations initiales (1), les fonctions radiales satisfont aux équations d'Euler

$$r^2\frac{d^2F_1}{dr^2}+2r\frac{dF_1}{dr}-2F_1=-4\pi\rho_0 r^2, \tag{3}$$

$$r^2\frac{d^2F_2}{dr^2}+2r\frac{dF_2}{dr}-2F_2=0 \tag{4}$$

et aux conditions supplémentaires pour $r = R$ qui découlent des relations (2). La solution particulière de la première équation est évidemment $F_{1\text{p.}} = -\pi\rho_0 r^2$, alors que la solution générale des équations homogènes (3) et (4) sera cherchée sous la forme de cr^s, c et s étant des constantes à déterminer. En introduisant cr^s dans l'équation (4) et en simplifiant par le facteur commun, on obtient une équation du second degré

$$s^2+s-2=0$$

dont les racines sont $s_1 = 1$ et $s_2 = -2$. Cela signifie que les solutions générales des équations (3) et (4) sont de la forme

$$F_1=c_1r+\frac{c_2}{r^2}-\pi\rho_0r^2,\quad F_2=c_3r+\frac{c_4}{r^2}.$$

De la continuité du potentiel au point $r=0$ ainsi que de $\varphi_2(\infty,\theta)=$ $=0$ on déduit que $c_2=c_3=0$. Les deux autres constantes sont déterminées par les conditions de raccordement des fonctions radiales et de leurs dérivées au point $r=R$. En omettant les calculs détaillés, nous nous contenterons d'indiquer le résultat final $\varphi_1 = \pi\rho_0 r\left({}^4/_3R - r\right)\cos\theta$, $E_{1r} = 2\pi\rho_0\left(r - {}^2/_3R\right)\cos\theta$, $E_{1\theta} =$ $=\pi\rho_0\left({}^4/_3R-r\right)\sin\theta$, $E_{1\psi}=0$ pour $r\leqslant R$; $\varphi_2=\dfrac{\pi\rho_0R^4}{3r^2}\cos\theta$, $E_{2r}=$ $=\dfrac{2\pi\rho_0R^4}{3r^3}\cos\theta$, $E_{2\theta}=\dfrac{\pi\rho_0R^4}{3r^3}\sin\theta$, $E_{2\psi}=0$ pour $r\geqslant R$.

56. $\varphi_1=\frac{2\pi}{3}\rho_0(3R-2r)r\cos\psi$, $E_{1r}=\frac{2\pi}{3}\rho_0(4r-3R)\cos\psi$, $E_{1\psi}=$ $=\frac{2\pi}{3}\rho_0(3R-2r)\sin\psi$, $E_{1z}=0$ pour $r\leqslant R$; $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r}\cos\psi$, $E_{2r}=\frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r^2}\cos\psi$, $E_{2\psi}=\frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r^2}\sin\psi$, $E_{2z}=0$ pour $r\geqslant R$.

57. Pour $r<R$: $\varphi_1=\frac{4\pi}{3}\sigma r\cos\theta$, $E_{1r}=-\frac{4\pi}{3}\sigma_0\cos\theta$, $E_{1\theta}=$ $=\frac{4\pi}{3}\sigma_0\sin\theta$, $E_{1\psi}=0$; pour $r>R$: $\varphi_2=\frac{4\pi R^3\sigma_0}{3r^2}\cos\theta$, $E_{2r}=$ $=\frac{8\pi R^3\sigma_0}{3r^3}\cos\theta$, $E_{2\theta}=\frac{4\pi R^3\sigma_0}{3r^3}\sin\theta$, $E_{2\psi}=0$, $E_{0r}=2\pi\sigma\cos\psi$, $E_{0\psi}=$ $=-2\pi\sigma\sin\psi$, $E_{0z}=0$ $(E=2\pi\sigma l_x)$.

58. Pour $r<R$: $\varphi_1=0$, $\mathbf{E}_1=0$; pour $r>R$: $\varphi_2=$ $=2\pi\sigma_0 R\left(\frac{R}{r}-\frac{r}{R}\right)\cos\psi$, $E_{2r}=2\pi\sigma_0R^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{R^2}\right)\cos\psi$, $E_{2\psi}=$ $=2\pi\sigma_0R^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)\sin\psi$, $E_{2z}=0$.

59. $E_{1r}=\frac{2\pi}{15}a(9r^2-5R^2)\cos\theta$, $E_{1\theta}=\frac{2\pi}{15}a(5R^2-3r^2)\sin\theta$, $E_{1\psi}=0$ pour $r\leqslant R$; $E_{2r}=\frac{8\pi aR^5}{15r^3}\cos\theta$, $E_{2\theta}=\frac{4\pi aR^5}{15r^3}\sin\theta$, $E_{2\psi}=0$ pour $r\geqslant R$.

60. Dans ce problème on donne deux domaines $r\leqslant R$ et $r\geqslant R$ de potentiels φ_1 et φ_2. L'équation de Poisson (I.7) et les conditions supplémentaires (I.8) et (I.9) permettent d'appliquer la méthode de séparation des variables. Conformément à la relation (A4.18), on suppose

$$\varphi_1=F_1(r)P_n(\cos\theta),$$
$$\varphi_2=F_2(r)P_n(\cos\theta).$$

Les fonctions radiales satisfont aux équations inhomogènes d'Euler

$$r^2\frac{d^2F_1}{dr^2}+2r\frac{dF_1}{dr}-n(n+1)F_1=-4\pi\rho_0R^2\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2},$$
$$r^2\frac{d^2F_2}{dr^2}+2r\frac{dF_2}{dr}-n(n+1)F_2=-4\pi\rho_0R^2\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}$$

et aux conditions de raccordement

$$\frac{\partial F_1(R)}{\partial r}=\frac{\partial F_2(R)}{\partial r},\quad F_1(R)=F_2(R).$$

Puis, on opère comme dans le problème 55. On trouve finalement

$$\varphi_1=2\pi\rho_0R^2\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^nP_n(\cos\theta),$$
$$\varphi_2=2\pi\rho_0R^2\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}P_n(\cos\theta).$$

61. $$\varphi_1 = \pi\rho_0 R^2 \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \text{ pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \pi\rho_0 R^2 \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} \cos n\psi$$

pour $r \geqslant R$.

62. Les potentiels $\varphi_1 = \varphi_1 (r, \psi)$ à l'intérieur et $\varphi_2 = \varphi_2 (r, \psi)$ à l'extérieur de la surface cylindrique satisfont à l'équation de Laplace et à la condition à la limite (I.9)

$$\varphi_1 (R, \psi) = \varphi_2 (R, \psi) = \varphi_0 \cos n\psi.$$

Les problèmes intérieur pour $r \leqslant R$ et extérieur pour $r \geqslant R$ sont résolus indépendamment l'un de l'autre par la méthode de séparation des variables

$$\varphi_1 = F_1 (r) \cos n\psi, \quad \varphi_2 = F_2 (r) \cos n\psi.$$

Dans ces conditions, pour les fonctions radiales $F_1 (r)$ et $F_2 (r)$ on obtient les équations d'Euler. Pour la résolution de ces équations il convient de partir de la continuité du potentiel au point $r = 0$, parce qu'à l'intérieur de la surface cylindrique les charges sont absentes. En outre, à l'extérieur de la surface cylindrique, le potentiel ne croît pas quand r augmente parce que la charge superficielle totale est nulle. Compte tenu de la condition à la limite (I.9), on trouve

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad \text{pour } r \geqslant R.$$

On détermine la densité superficielle de charge à partir de la condition à la limite (I.8) sur la surface cylindrique, qui n'a pas encore été utilisée

$$\sigma = \frac{n\varphi_0}{2\pi R} \cos n\psi.$$

63. $$\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^l [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)] \quad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)] \text{ pour } r \geqslant R;$$

$$\sigma = \frac{2l+1}{4\pi R} \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)].$$

64. On applique la méthode de séparation des variables, en posant

$$\varphi (x, y) = X (x) Y (y). \tag{1}$$

Le long de l'axe des Z, le potentiel est uniforme. L'introduction de la fonction (1) dans l'équation de Laplace donne

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{\frac{d^2Y}{dy^2}}{Y} = \lambda$$

ou

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda Y = 0, \tag{3}$$

où λ est une constante. Pour que la condition à la limite soit satisfaite dans les plans $y = 0$ et $y = b$, il faut que

$$Y(0) = Y(b) = 0. \tag{4}$$

A l'équation (3) et aux conditions supplémentaires (4) satisfait la fonction

$$Y_n = c_n \sin \frac{n\pi}{b} y, \tag{5}$$

où c_n sont des constantes arbitraires et $n = 0, 1, 2 \ldots$ Dans ce cas $\lambda = (n\pi/b)^2$.

Puisqu'à l'intérieur du domaine considéré les charges sont absentes, le potentiel cherché ne croît pas quand $x \to \infty$. Aussi, de deux solutions indépendantes de l'équation (2) ne garde-t-on que l'exponente décroissante pour chaque valeur fixe du nombre n:

$$X_n = b_n e^{-\frac{n\pi}{b} x}, \tag{6}$$

où b_n est une constante arbitraire.

Donc, la solution particulière de l'équation de Laplace est donnée par le produit des fonctions (5) et (6). Dans le cas général, à l'équation de Laplace et aux conditions aux limites dans les plans $y = 0$ et $y = b$ satisfait une somme infinie des produits $X_n Y_n$:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin \frac{n\pi}{b} y, \tag{7}$$

où l'on a introduit la notation $a_n = c_n b_n$.

On choisira les coefficients a_n de façon que la condition à la limite dans le plan $x = 0$ soit satisfaite elle aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{b} y = \varphi_0. \tag{8}$$

A cet effet on profitera du fait que l'ensemble des expressions (5) forme un système complet de fonctions réciproquement orthogonales dans l'intervalle [0, b]. En multipliant les deux membres de l'égalité (8) par $\sin \frac{m\pi}{b} y$ et en intégrant par rapport à y, on obtient

$$a_m = 0 \qquad \text{pour } m = 2k,$$

$$a_m = \frac{4\varphi_0}{\pi(2k+1)} \qquad \text{pour } m = 2k+1,$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots$ Le potentiel (7) prend finalement la forme

$$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)\pi}{b} x} \sin \frac{(2k+1)\pi}{b} y.$$

Dans le problème considéré, ainsi que dans certains autres problèmes qui suivent, la solution est représentée sous la forme d'une série infinie bien que cette dernière soit parfois rendue sommable à l'aide de certains procédés mathématiques.

65. $$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{a} x}{2k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a} b} + \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{b} y}{2k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b} (a-x)}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b} a} \right).$$

Le long de l'axe des Z le potentiel est uniforme.

66. On placera l'origine des coordonnées au centre de l'hémisphère et on dirigera l'axe des Z le long de l'axe de symétrie vers la concavité. On développera le potentiel cherché $\varphi(r, \theta)$ en série (A4.15) suivant les polynômes de Legendre

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos\theta), \tag{1}$$

où les fonctions radiales $F_n(r)$ sont à déterminer. En introduisant l'expression (1) dans l'équation de Laplace, on retrouve l'équation d'Euler

$$\frac{d^2F_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} F_n = 0$$

avec solution

$$F_n = a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n + b_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},$$

où a_n et b_n sont des constantes arbitraires. De la continuité du potentiel on déduit $b_n = 0$. Il vient

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

Les coefficients a_n sont choisis de manière à satisfaire aux conditions aux limites

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(0) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) = \varphi_0. \tag{4}$$

De la condition (3) on déduit que $a_{2k} = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, de sorte que les séries (2) à (4) ne contiennent que des polynômes impairs. Pour déterminer les coefficients a_{2k+1} restants, il convient de multiplier les deux membres de l'égalité (4) par $P_m(\cos\theta)\sin\theta$, d'intégrer par rapport à l'angle θ dans les limites de 0 à $\pi/2$ et d'utiliser les formules (A4.9) et (A4.11). Alors, on obtiendra

$$\varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

67. $$\varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

68. On écrira commodément la condition à la limite pour le potentiel $\varphi(r, \theta)$ sous la forme

$$\varphi(R, \theta) = {}^1/_2(\varphi_a + \varphi_b) + \begin{cases} {}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ -{}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad \pi/2 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Puis, on représentera le potentiel cherché par la somme de deux termes $\varphi(r, \theta) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r, \theta)$ dont chacun satisfait à sa condition à la limite

$$\varphi_1(R) = {}^1/_2(\varphi_a + \varphi_b),$$

$$\varphi_2(R, \theta) = \begin{cases} {}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ -{}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad \pi/2 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

La forme de la fonction $\varphi_1(r)$ est évidente, alors que le potentiel $\varphi_2(r, \theta)$ sera déterminé de même que dans le problème 66:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b)\frac{R}{r} + $$
$$+ \frac{1}{4}(\varphi_a - \varphi_b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4k+3)(2k)!}{2^{2k}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)}P_{2k+1}(\cos\theta).$$

69. $$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)\ (r \leqslant R),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)}P_{2k+1}(\cos\theta)\ (r \geqslant R).$$

I n d i c a t i o n. Il est commode de choisir l'origine des coordonnées au centre de la circonférence et de diriger l'axe des Z vers le demi-espace à étudier. Dans la solution de l'équation de Laplace, obtenue sous la forme de série de polynômes de Legendre, il convient de garder seulement des termes qui sont continus en variable r. Cette exigence délimite deux domaines situés à l'intérieur et à l'extérieur de l'hémisphère de rayon R dans lesquels la variation du potentiel en fonction de la variable r est bien caractéristique:

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad \text{pour } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \qquad \text{pour } R \leqslant r.$$

La condition à la limite dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ conduit à la conclusion

$$a_0 = \varphi_0,\quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_{2m} = b_{2m} = 0 \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$a_{2k+1} \neq 0 \quad \text{et} \quad b_{2k+1} \neq 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Pour déterminer les coefficients restants a_{2k+1} et b_{2k+1}, il faut utiliser la continuité du potentiel et de sa dérivée par rapport à r sur la surface de l'hémisphère de rayon $r = R$.

70. $$\varphi_1 = 2\pi\sigma r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!(k+1)!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k}P_{2k+1}(\cos\theta)\ (r \leqslant R).$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\sigma R^3}{r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!(k+1)!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2k}P_{2k+1}(\cos\theta)\ (r \geqslant R).$$

71. L'axe des Z du système de coordonnées cylindriques est confondu avec l'axe de la surface cylindrique. Le long de cette direction, le potentiel est uniforme. Le potentiel intérieur $\varphi_1(r, \psi)$ et le potentiel extérieur $\varphi_2(r, \psi)$ sont calculés indépendamment l'un de l'autre. On change leur origine en posant

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_1(r, \psi),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_2(r, \psi).$$

Les nouveaux potentiels $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ satisfont à l'équation de Laplace et à la condition à la limite

$$\tilde{\varphi}_1(R, \psi) = \tilde{\varphi}_2(R, \psi) = \begin{cases} {}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad 0 < \psi < \pi, \\ -{}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

Puis, on applique la méthode de séparation des variables et on cherche la solution du problème posé sous la forme

$$\tilde{\varphi}(r, \psi) = F(r)\,\Phi(\psi), \tag{1}$$

où les indices 1 et 2 du potentiel sont omis. En introduisant l'expression (1) dans l'équation de Laplace on obtient

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dF}{dr}\right)}{F} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\psi^2}}{\Phi} = \lambda,$$

λ étant ici une constante. La dernière relation contient deux équations

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2} + \lambda\Phi = 0, \tag{2}$$

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2} + r\frac{dF}{dr} - \lambda F = 0. \tag{3}$$

La première d'entre elles a pour solution

$$\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\psi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\psi, \tag{4}$$

où A_1, B et λ sont des constantes. Puisqu'après la variation de l'angle ψ de 0 à 2π, le potentiel (1) doit coïncider avec l'expression initiale, on a

$$\Phi(\psi + 2\pi) = \Phi(\psi).$$

Cette égalité est vérifiée à la condition que $\sqrt{\lambda} = n$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ On cherche la solution de la deuxième équation sous la forme $F = r^s$. Après l'introduction dans (3) et la simplification par le facteur commun, on obtient $s^2 = n^2$ ou $s = \pm n$. D'où l'on trouve

$$F = Cr^n + \frac{D}{r^n}, \tag{5}$$

C et D étant des constantes arbitraires. Le produit des fonctions (4) et (5) est une solution particulière de l'équation de Laplace. Dans cette solution on a $D = 0$ à l'intérieur de la surface cylindrique et $C = 0$ à son extérieur, parce que le potentiel cherché est une fonction bornée. La solution générale est la somme infinie des solutions particulières

$$\tilde{\varphi}_1(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi) \quad \text{pour} \quad r \leqslant R,$$

$$\tilde{\varphi}_2(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (c_n \cos n\psi + d_n \sin n\psi) \quad \text{pour} \quad r \geqslant R.$$

Les constantes arbitraires a_n, b_n, c_n et d_n sont déterminées par les conditions aux limites. La continuité du potentiel au passage à travers la surface cylindrique exige que $c_n = a_n$ et $d_n = b_n$, alors que l'imparité des fonctions $\tilde{\varphi}_1(R, \psi)$ et $\tilde{\varphi}_2(R, \psi)$ en variable ψ conduit à $a_n = 0$. Pour déterminer b_n, on multiplie les deux membres de l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\psi = \begin{cases} {}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad 0 < \psi < \pi, \\ -{}^1/_2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{pour} \quad \pi < \psi < 2\pi \end{cases}$$

par $\sin m\psi$ et on utilise l'orthogonalité des sinus pour $m \neq n$. Alors, on obtient

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi(2k+1)},$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots$ Finalement,

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \sin(2k+1)\psi \quad (r \leqslant R).$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \sin(2k+1)\psi \quad (r \geqslant R).$$

72. $$\varphi_1 = 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \leqslant R).$$

$$\varphi_2 = 2\pi R(\sigma_a + \sigma_b) \ln \frac{R}{r} +$$

$$+ 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \geqslant R).$$

Le potentiel est déterminé au terme constant φ_0 près. Il est uniforme le long de l'axe des Z qui coïncide avec l'axe de la surface cylindrique.

73. On place l'origine des coordonnées au centre du cercle et on dirige l'axe des Z perpendiculairement au plan du cercle. En coordonnées cylindriques, le potentiel ne dépend pas de l'angle polaire et, suivant la variable z, s'exprime par une fonction paire $\varphi(r, -z) = \varphi(r, z)$. En appliquant la méthode de séparation des variables, on cherche la solution sous la forme

$$\varphi(r, z) = F(r) Z(z). \tag{1}$$

En introduisant cette expression dans l'équation de Laplace, on obtient

$$-\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)}{F} = \frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = C.$$

Pour que le potentiel (1) décroisse quand $|z| \to \infty$, la constante C doit être réelle et positive $C = \lambda^2$, où pour fixer les idées on pose $\lambda > 0$. Alors, il vient

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \lambda^2 F = 0. \tag{3}$$

De l'équation (2) on déduit

$$Z = a_\lambda e^{-\lambda|z|}, \tag{4}$$

où la constante a_λ est à déterminer.

La solution bornée de l'équation (3) s'exprime par une fonction de Bessel (A6.2) d'ordre zéro:

$$F(r) = b_\lambda J_0(\lambda r), \tag{5}$$

multipliée par une constante arbitraire b_λ.

Le produit des fonctions (4) et (5) est une solution particulière de l'équation de Laplace qui satisfait à une valeur fixe du paramètre λ pouvant varier ici de façon continue. C'est pourquoi, la solution générale est de la forme

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \lambda c_\lambda J_0(\lambda r) e^{-\lambda|z|} d\lambda, \tag{6}$$

où on a introduit, pour la commodité, la notation $a_\lambda b_\lambda = \lambda c_\lambda$. Le coefficient c_λ, en tant que fonction du paramètre λ, est choisi de

manière que soit satisfaite la condition à la limite

$$\int_0^\infty c_\lambda J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda = \begin{cases} \varphi_0 & \text{pour} \quad r < R, \\ 0 & \text{pour} \quad r > R. \end{cases}$$

La relation obtenue est le développement en intégrale de Fourier-Bessel de la fonction figurant au second membre de cette égalité *). Cela permet de calculer le coefficient c_λ par la formule (A6.24). Il en résultera que le potentiel (6) s'écrira sous la forme d'une intégrale par rapport au paramètre λ qui est la suivante:

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 R \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, J_1(\lambda R)\, e^{-\lambda|z|}\, d\lambda.$$

Il est facile d'exprimer cette intégrale par des fonctions spéciales indiquées dans l'aide-mémoire [9]. Elle peut être également représentée par la série suivant les polynômes de Legendre qui a été obtenue, par un autre procédé dans le problème 69.

74. $\varphi(r, z) = 2\pi\sigma R \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, J_1(\lambda R)\, e^{-\lambda|z|} \frac{d\lambda}{\lambda}.$

75. $\varphi(r, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin R\lambda\, e^{-\lambda|z|} \frac{d\lambda}{\lambda}$;

$$\sigma = \frac{\varphi_0}{\pi^2 \sqrt{R^2 - r^2}} \quad \text{pour} \quad r < R.$$

I n d i c a t i o n. On écrira la condition à la limite dans le plan $z = 0$ contenant le disque, sous la forme

$$\varphi(r, 0) = \varphi_0 \quad \text{pour} \quad r < R,$$

$$\frac{\partial \varphi(r, 0)}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad r > R.$$

La deuxième relation indique que les charges superficielles à l'extérieur du disque sont absentes. Puis, on se servira de la relation bien connue

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \frac{\sin R\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad r < R;$$

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \sin R\lambda\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r > R, \\ \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} & \text{pour} \quad r < R. \end{cases}$$

*) Pour le développement en intégrale de Fourier-Bessel consulter par exemple les ouvrages [7, 8].

§ 6. Densité de charge des corps de différente configuration

76. $\rho = \frac{3a}{2\pi} \cos\psi$ pour $r < R$, $\rho = 0$ pour $r > R$.

77. $\rho = e\delta(\mathbf{r}) + \frac{3e}{4\pi R^3}$ $(r < R)$, $\rho = 0\,(r > R)$; $Q = 2e$.

78. La sphère de rayon R est uniformément chargée avec une densité superficielle $\sigma = Q/4\pi R^2$.

79. La surface cylindrique de rayon R est uniformément chargée avec une densité superficielle $\sigma = q/4\pi R$.

80. a) $2R\sigma\delta\,(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$, $2R\sigma\delta\,(r^2 + z^2 - R^2)$, $\sigma\delta\,(r - R)$;

b) $2Rq\delta\,(x^2 + y^2 - R^2)\,\delta(z)$, $q\delta(r - R)\,\delta(z)$, $\frac{q}{R}\,\delta(r - R) \times$
$\times\,\delta(\cos\theta) = \frac{q}{R}\,\delta(r - R)\,\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $q\delta(x)\,\delta(y)$, $\frac{q}{\pi r}\,\delta(r)$, $\frac{2q}{\pi r^2}\,\delta(1 - \cos^2\theta)$;

d) $\sigma\delta(z)$, $\sigma\delta(z)$, $\frac{\sigma}{r}\,\delta(\cos\theta) = \frac{\sigma}{r}\,\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$;

e) $2R\sigma\delta\,(x^2 + y^2 - R^2)$, $\sigma\delta(r - R)$, $\sigma\delta(r\sin\theta - R)$.

I n d i c a t i o n. Il convient de considérer un élément de volume ΔV qui contient une partie de la distribution de charge donnée ayant pour valeur

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho\, dV. \tag{1}$$

La distribution volumique ρ cherchée doit satisfaire aux conditions suivantes. Si c'est la distribution de charge sur la surface avec une densité superficielle σ qui a été donnée primitivement, après l'intégration de (1) par rapport à la coordonnée transversale ξ :

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho\, d\xi\, dS,$$

l'expression pour la charge ΔQ doit prendre la forme

$$\Delta Q = \int_{\Delta S} \sigma\, dS,$$

où ΔS est une partie de la surface chargée donnée qui s'est trouvée à l'intérieur du volume considéré. D'une manière analogue, si c'est la distribution de charge sur un contour linéaire avec une densité linéique q qui a été donnée, après l'intégration de (1) par rapport à

deux coordonnées transversales ξ et η :

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho \, d\xi \, d\eta \, dl,$$

l'expression pour la charge ΔQ doit prendre la forme

$$\Delta Q = \int_{\Delta L} q \, dl,$$

où ΔL est une partie du contour linéaire chargé donné qui s'est trouvée à l'intérieur du volume considéré ΔV.

81. a) $\rho = 2R\sigma\delta(x^2+y^2+z^2-R^2)\,\eta(z)$, $\rho = 2R\sigma\delta(r^2+z^2-R^2)\times \times\eta(z)$, $\rho = \sigma\delta(r-R)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

b) $\rho = 2Rq\delta(x^2+y^2-R^2)\,\delta(z)\,\eta(y)$, $\rho = q\delta(r-R)\,\delta(z)\,\eta(\pi-\psi)$, $\rho = \frac{q}{R}\delta(r-R)\,\delta(\cos\theta)\,\eta(\pi-\psi)$;

c) $\rho = q\delta(x)\,\delta(y)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \frac{q}{\pi r}\delta(r)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \frac{q}{\pi r^2}\delta(1-\cos\theta)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)[\eta(r)-\eta(r-l)]$;

d) $\rho = \sigma\delta(z)\,\eta(R^2-x^2-y^2)$, $\rho = \sigma\delta(z)\,\eta(R-r)$, $\rho = \frac{\sigma}{r}\delta(\cos\theta)\times \times\eta(R-r)$;

e) $\rho = 2R\sigma\delta(x^2+y^2-R^2)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \sigma\delta(r-R)\times \times[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \sigma\delta(r\sin\theta-R)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)[\eta(r)- -\eta(r-\sqrt{R^2+h^2})]$.

82. $\rho = \frac{2q}{b}\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\delta(z)$.

83. $\rho = \frac{2\sigma}{b}\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,\delta\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$.

84. Une charge de densité linéique $q = {}^1/_2\pi a$ est uniformément répartie le long de l'axe des Z.

85. a) Deux plans $x = a$ et $x = -a$, uniformément chargés avec une densité superficielle σ ;

b) deux droites $x = a$, $z = 0$ et $x = -a$, $z = 0$, uniformément chargées avec une densité linéique q ;

c) un cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$ situé dans le plan XY et uniformément chargé avec une densité linéique q ;

d) une ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ située dans le plan XY et chargée avec une densité linéique $q = \frac{aQ}{2\pi\sqrt{a^4+(b^2-a^2)\,x^2}}$. La charge totale de l'ellipse est égale à Q ;

e) une surface elliptique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, chargée avec une densité superficielle

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi ab\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)}}.$$

La charge totale de la surface elliptique est égale à Q.

§ 7. Moment électrique dipolaire

87. $\rho=\frac{\sigma}{r}\delta(\theta-\theta_0)\,\eta(l-r)$, $\theta_0=\arcsin\frac{R}{l}$; $d_x=d_y=0$, $d_z=\frac{2}{3}\pi\sigma Rl^2\sqrt{1-R^2/l^2}$.

88. $\rho=\frac{q}{r}\delta(z)\,\delta(\psi-\psi_0)\,\eta(l-r)$; $d_x={}^1/_2 ql^2\cos\psi_0$, $d_y={}^1/_2 ql^2\sin\psi_0$, $d_z=0$.

89. Le dipôle ponctuel de moment **d** est le cas limite du système de deux charges e et $-e$ où la distance l entre les charges tend vers zéro et leur valeur absolue tend vers l'infini de sorte que

$$\lim_{\substack{l\to 0\\ e\to\infty}} e\mathbf{l}=\mathbf{d},$$

le vecteur **l** étant dirigé de la charge négative vers la charge positive.

La distribution de densité volumique dans le cas où les charges e et $-e$ sont placées en des points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_+=\mathbf{r}_0+\mathbf{l}$ et $\mathbf{r}_-=\mathbf{r}_0$ se décrit par la fonction $\rho_e(\mathbf{r})=e\,[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+)-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)]$. Si, dans cette expression, on passe à la double limite $l\to 0$ et $e\to\infty$, on obtient la densité volumique de charge du dipôle ponctuel

$$\rho(\mathbf{r})=\lim_{\substack{l\to 0\\ e\to\infty}} el\,\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+)-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)}{l}=d\,\frac{\partial'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}}\bigg|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0},$$

où la dérivée dans le sens du vecteur **l** est prise par rapport aux coordonnées avec prime. D'après les formules (A1.11) et

$$\frac{\partial'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}}=-\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}},$$

l'expression obtenue peut être mise sous la forme

$$\rho(\mathbf{r})=-(\mathbf{d}\nabla)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

90. $\varphi=\frac{\mathbf{d}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$.

92. $U = Q\frac{\mathbf{dr}}{r^3}$; $\mathbf{F} = Q\left(\frac{3(\mathbf{dr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}\right)$.

93. a) $\mathbf{F} = \frac{4\pi a R^5}{5}\left(\frac{\mathbf{d}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{dr})\mathbf{r}}{r^5}\right)$, $\mathbf{N} = \frac{4\pi a R^5}{5r^3}(\mathbf{d}\times\mathbf{r})$; b) $\mathbf{F} = \frac{4\pi a}{5}(r^2\mathbf{d} + 2(\mathbf{dr})\mathbf{r})$, $\mathbf{N} = \frac{4\pi}{5}ar^2(\mathbf{d}\times\mathbf{r})$.

94. $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2 = \frac{3}{r^7}\{[r^2(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2) - 5(\mathbf{d}_1\mathbf{r})(\mathbf{d}_2\mathbf{r})]\mathbf{r} + r^2[(\mathbf{d}_2\mathbf{r})\mathbf{d}_1 + (\mathbf{d}_1\mathbf{r})\mathbf{d}_2]\}$; $\mathbf{N}_1 = \frac{(\mathbf{d}_2\times\mathbf{d}_1)}{r^3} + \frac{3(\mathbf{d}_2\mathbf{r})(\mathbf{d}_1\times\mathbf{r})}{r^5}$, $\mathbf{N}_2 = \frac{(\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2)}{r^3} + \frac{3(\mathbf{d}_1\mathbf{r})(\mathbf{d}_2\times\mathbf{r})}{r^5}$.

95. $\varphi = -\mathbf{ar}/r^3$. Le vecteur **a** est le moment du dipôle ponctuel pris avec le signe moins.

96. Le moment électrique dipolaire $\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,dV'$ d'un élément de volume dV' placé en un point de rayon vecteur $\mathbf{r}'$ produit au point d'observation de rayon vecteur $\mathbf{r}$ le potentiel suivant:

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\mathbf{R}}{R^3}\,dV',$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. D'après le principe de superposition on trouve le potentiel produit par le moment électrique dipolaire de volume V:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\mathbf{R}}{R^3}\,dV'. \qquad (1)$$

On utilisera la relation

$$\operatorname{div}'\frac{\mathbf{P}}{R} = \frac{\operatorname{div}'\mathbf{P}}{R} + \mathbf{P}\operatorname{grad}'\frac{1}{R},$$

où les dérivées sont calculées par rapport aux coordonnées avec prime. Alors, l'intégrale (1) peut être mise à l'aide du théorème de Ostrogradsky-Gauss (A1.15) sous la forme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R}\,d\mathbf{S}' - \int_V \frac{\operatorname{div}'\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R}\,dV'.$$

On étendra le volume V indéfiniment dans tous les sens. Dans ce cas, l'intégrale sur la surface S qui limite le volume V devient nulle. Cela tient à ce que la fonction sous le signe de l'intégrale de surface S décroît plus vite que $1/r'^3$ alors que la surface d'intégration S augmente proportionnellement à r'^2. Il en résulte

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{-\operatorname{div}'\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'.$$

En comparant l'expression obtenue à la solution générale de l'équation de Poisson (I.11), on arrive à cette conclusion que le

moment électrique dipolaire réparti produit dans l'espace le même champ électrique que celui dû à une charge de densité volumique $\rho(\mathbf{r}) = -\text{div}\,\mathbf{P}(\mathbf{r})$.

§ 8. Tenseur de moment électrique quadrupolaire

98. $D_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = D_{22} = -36ea^2$, $D_{33} = 72ea^2$; $\mathbf{d} = 0$.

99. a) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = {}^3/_8 QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$;

b) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = {}^1/_2 QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$;

c) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = {}^1/_3 QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$,
$D_{11} = D_{22} = QR^2/12$, $D_{33} = -QR^2/6$.

100. $D_{\alpha\beta} = 0$.

101. Passons au système de coordonnées avec prime dont l'origine est située au centre de courbure de l'hémisphère et les axes des X', Y' et Z' sont parallèles aux axes de même nom des X, Y et Z. Dans le système de coordonnées avec prime on a $d'_1 = d'_2 = 0$, $d'_3 = QR/2$ et $D'_{\alpha\beta} = 0$. Utilisons la loi de transformation de coordonnées

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}', \quad a_1 = a_2 = R, \quad a_3 = 0$$

et établissons la relation entre les composantes des tenseurs $D_{\alpha\beta}$ et $D'_{\alpha\beta}$ dans les systèmes de coordonnées initial et avec prime

$$D_{\alpha\beta} = D'_{\alpha\beta} + Q(3a_\alpha a_\beta - a^2\delta_{\alpha\beta}) + 3(a_\alpha d'_\beta + d'_\alpha a_\beta) - 2\mathbf{a}\mathbf{d}'\delta_{\alpha\beta}.$$

On en tire

$$D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

102. $$D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2\pi}\begin{pmatrix} 5\pi & 12 & 0 \\ 12 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & -4\pi \end{pmatrix}.$$

103. Représentons le tenseur de moment électrique quadrupolaire de l'ellipse chargée sous la forme

$$D_{\alpha\beta} = q \oint (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\,dl, \tag{1}$$

où l'intégrale curviligne est prise sur le contour de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{2}$$

On voit que les seules composantes non nulles du tenseur $D_{\alpha\beta}$ sont ses composantes diagonales. L'intégrale (1) prise suivant le contour

fermé est égale au quadruple de l'intégrale prise sur l'arc d'ellipse situé dans le premier quadrant du plan XY. Remplaçons l'intégration suivant cet arc d'ellipse par celle suivant l'intervalle $[0, a]$ de l'axe des X :

$$D_{11}=4q\int_0^a (2x^2-y^2)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

où la fonction $y = y(x)$ est donnée par l'expression (2). En utilisant le changement de variable $x = a\xi$ et la formule $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$, mettons cette dernière intégrale sous la forme

$$D_{11}=4qa^3\int_0^1 [3\xi^2-1+\varepsilon^2(1-\xi^2)]\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\xi^2}{1-\xi^2}}\,d\xi.$$

Développons l'expression sous le signe somme en série suivant le petit paramètre ε^2 et gardons les deux premiers termes de cette série. Les intégrales par rapport à la variable ξ qui y apparaissent sont données dans les tables de fonctions. On obtient finalement

$$D_{11}=\pi qa^3\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon^2\right),\qquad D_{22}=\pi qa^3\left(1-\frac{15}{8}\varepsilon^2\right),$$

$$D_{33}=-2\pi qa^3\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right),\qquad D_{\alpha\beta}=0 \text{ pour } \alpha\neq\beta.$$

104. Ecrivons le tenseur de moment électrique quadrupolaire cherché sous la forme

$$D_{\alpha\beta}=\sigma\oint(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})\,dS,$$

l'intégration étant étendue sur la surface elliptique fermée

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Dans le cas d'un corps de révolution il suffit de calculer seulement la composante D_{33}. Changeons les variables

$$x=ax',\quad y=ay',\quad z=bz'$$

et passons à l'intégration sur la sphère de rayon unité

$$D_{33}=\sigma a^2\oint[2b^2z'^2-a^2(x'^2+y'^2)]\times$$
$$\times\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}}\,dS',$$

où

$$z'^2 = 1 - x'^2 - y'^2,$$
$$b^2 = a^2(1+\varepsilon^2) \quad \text{pour } b > a,$$
$$b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \quad \text{pour } b < a.$$

Développons l'expression sous le signe somme en série suivant le petit paramètre ε^2 et gardons des termes à sa plus petite puissance. On trouve finalement

$$D_{33} = \pm \frac{32\pi}{15} \sigma a^4 \varepsilon^2,$$

où le signe plus est pris pour $b > a$ et le signe moins pour $b < a$. Les autres composantes du tenseur cherché sont

$$D_{11} = D_{22} = -{}^1/_2 D_{33},$$
$$D_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta.$$

105.

$$D_{\alpha\beta} = 12ea^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D'_{\alpha\beta} = 12ea^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

106. $d_1 = d(\cos\alpha - 1)$, $d_2 = d \sin\alpha$, $d_3 = 0$;

$$D_{\alpha\beta} = ad \begin{pmatrix} 4(1+\cos\alpha) & 3\sin\alpha & 0 \\ 3\sin\alpha & -2(1+\cos\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -2(1+\cos\alpha) \end{pmatrix}.$$

I n d i c a t i o n. Il convient de considérer chaque dipôle ponctuel de moment **d** comme le cas limite d'un système de deux charges e et $-e$ qui sont placées à la distance l l'une de l'autre et se rapprochent indéfiniment tout en croissant en valeur absolue. Dans ce cas

$$\lim_{\substack{l\to 0 \\ e\to\infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d}, \tag{1}$$

le vecteur **l** étant dirigé de la charge négative vers la charge positive. Dans les composantes du tenseur de moment électrique quadrupolaire écrit pour un système distinct de deux charges e et $-e$, il faut passer à la double limite $l \to 0$ et $e \to \infty$ et tenir compte de (1).

107. $D_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = D_{22} = \frac{Q}{5}(a^2 - b^2)$, $D_{33} = \frac{2Q}{5}(b^2 - a^2)$. Après la rotation de l'ellipsoïde, le tenseur $D_{\alpha\beta}$

prend la forme

$$D_{\alpha\beta}=\frac{Q\,(b^2-a^2)}{5}\begin{pmatrix}3\sin^2\alpha-1 & 0 & 3\sin\alpha\cos\alpha\\ 0 & -1 & 0\\ 3\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 3\cos^2\alpha-1\end{pmatrix}.$$

108.

$$D_{11}=\frac{Q}{5}\,[a^2\,(3\cos^2\alpha-1)+b^2\,(3\sin^2\alpha-1)-c^2],$$

$$D_{22}=\frac{Q}{5}\,[a^2\,(3\sin^2\alpha-1)+b^2\,(3\cos^2\alpha-1)-c^2],$$

$$D_{33}=\frac{Q}{5}\,(2c^2-a^2-b^2),$$

$$D_{12}=\frac{3Q}{5}\,(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$D_{13}=D_{23}=0.$$

109. $$D_{\alpha\beta}=\frac{QR^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-3\sin^2\alpha & 3\sin\alpha\cos\alpha\\ 0 & 3\sin\alpha\cos\alpha & 3\sin^2\alpha-2\end{pmatrix}.$$

110. $E_\gamma\,(\mathbf{r})=D_{\alpha\beta}x_\alpha\left(\frac{5}{2}\frac{x_\beta x_\gamma}{r^7}-\frac{\delta_{\beta\gamma}}{r^5}\right).$

111. $\varphi=\frac{3}{r^5}\,a_{\alpha\beta}\,(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})$. [En se servant [de la relation $a_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}r^2=a_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ et des formules (A2.16) et (A2.22), on peut mettre le potentiel sous forme canonique

$$\varphi=\frac{D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5}$$

dans laquelle le tenseur

$$D_{\alpha\beta}=3\,[3\,(a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha})-2a_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta}]$$

est symétrique et sa trace est nulle $D_{\sigma\sigma}=0$. Cela signifie que les composantes de D_α forment le tenseur de moment électrique quadrupolaire. La quantité $a_{\alpha\beta}$ est proportionnelle au tenseur de moment électrique quadrupolaire dans le cas où $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ et $a_{\sigma\sigma}=0$.

112. $d_x=\frac{i}{\sqrt{2}}\,(Q_1^{(1)}-Q_{-1}^{(1)}),\quad d_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(Q_1^{(1)}+Q_{-1}^{(1)}),\quad d_z=-iQ_0^{(1)};$

$$D_{11}=Q_0^{(2)}-\sqrt{\frac{3}{2}}\,(Q_2^{(2)}+Q_{-2}^{(2)}),\qquad D_{12}=i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,(Q_2^{(2)}-Q_{-2}^{(2)}),$$

$$D_{13}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,(Q_1^{(2)}-Q_{-1}^{(2)}),\qquad D_{22}=Q_0^{(2)}+\sqrt{\frac{3}{2}}\,(Q_2^{(2)}+Q_{-2}^{(2)}),$$

$$D_{23}=-i\sqrt{\frac{3}{2}}\,(Q_1^{(2)}+Q_{-1}^{(2)}),\qquad D_{33}=-2Q_0^{(2)}.$$

113. a) $U = ea^2 \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x^2}$;

b) $U = e\varphi(0) - \frac{2ea}{\sqrt{3}} \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} + \frac{ea^2}{12}\left(3\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(0)$;

c) $U = ea^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(0)$;

d) $U = Q\varphi(0) + \frac{Q}{10}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(0)$.

114. $U = Q\varphi(0) + \frac{Q}{8}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(0)$;

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}(0) + \frac{Q}{8}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{E}(0),$$

où $\mathbf{E}(0) = -\operatorname{grad}\varphi(0)$ est l'intensité du champ électrique extérieur.

115. $\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + (\mathbf{d}\operatorname{grad})\mathbf{E} + \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$,
où l'intensité du champ électrique et ses dérivées sont prises en un point situé à l'intérieur du système chargé. Ce point sert d'origine du système de coordonnées cartésiennes dans lequel sont calculées les grandeurs $\mathbf{d}$ et $D_{\alpha\beta}$.

116. $N_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}d_\beta E_\gamma + \frac{1}{3}e_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta\delta}\frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\delta}$, où l'intensité du champ électrique et ses dérivées sont prises en un point situé à l'intérieur du domaine chargé. Ce point sert d'origine du système de coordonnées cartésiennes dans lequel sont calculées les grandeurs $\mathbf{d}$ et $D_{\alpha\beta}$.

117. $\mathbf{F} = -36ea^2\frac{\partial^2\mathbf{E}(0)}{\partial z^2}$;

$$N_x = 72ea^2\frac{\partial E_z(0)}{\partial y}, \quad N_y = -72ea^2\frac{\partial E_x(0)}{\partial z}, \quad N_z = 0.$$

118. $N_x = N_y = 0, \qquad N_z = \frac{eql^3}{r^3}\sin 2\psi_0$.

§ 9. Champ à grande distance du système chargé

119. a) $\varphi = \frac{\pi}{2}qR^3\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}$;

b) $\varphi = \frac{\pi}{4}\rho h R^2\left(R^2 - \frac{4}{3}h^2\right)\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}$;

c) $\varphi = \pi\sigma h R\left(R^2 - \frac{2}{3}h^2\right)\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}$;

d) $\varphi = \frac{ql^3}{3}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$.

120. a) $\varphi = \frac{ea^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$;

b) $\varphi = \frac{e}{r} - \frac{2ea}{\sqrt{3}\,r^2}\sin\theta\sin\psi - \frac{ea^2}{12r^3}[2 + 3\sin^2\theta(1 - 4\cos^2\psi)]$;

c) $\varphi = -\frac{3ea^2}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\psi$.

121. $D_{\alpha\beta} = 6ad\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\varphi = 6ad\,\frac{xz}{r^5}$.

122. $\psi_0 = \pi \pm 2\sqrt{\frac{2l}{3x_0}}$.

123. $\varphi = \frac{4QR}{\pi r^3}\left[y - R + \frac{3Ry}{r^2}(x + y)\right]$.

I n d i c a t i o n. On utilisera la méthode exposée lors de la résolution du problème 101.

124. $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r^3}(Rx + hz) + \frac{Q}{2r^5}\left[\left(\frac{9}{4}R^2 - \frac{4}{3}h^2\right)x^2 - \left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{4}{3}h^2\right)y^2 + \left(\frac{8}{3}h^2 - \frac{3}{2}R^2\right)z^2 + 6Rhxz\right]$.

I n d i c a t i o n. On utilisera la méthode exposée lors de la résolution du problème 101.

125. a) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{4r^3}[3(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)\sin^2\theta - a^2 - b^2]$;

b) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{6}Q(b^2 - a^2)\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$;

c) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{6r^3}[a^2(3\sin^2\theta\cos^2\psi - 1) + b^2(3\sin^2\theta\sin^2\psi - 1) + c^2(3\cos^2\theta - 1)]$.

126. $\varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{r^{l+1}}Q_0^{(l)}P_l(\cos\theta)$,

$$Q_0^{(2k)} = 2\pi\sigma R^2\delta_{0k}, \quad Q_0^{(2k+1)} = \frac{i2\pi\sigma R^{2k+3}(2k)!}{2^{k+1}k!(k+1)!},$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots$

127. $F_x = F_z = 0$, $F_y = \frac{12QRd}{\pi z^4}$;

$N_x = \frac{4QRd}{\pi z^3}$, $N_y = N_z = 0$.

128. $U = -\frac{Q(\mathbf{dr})}{r^3} + \frac{3Q}{10r^5}\left\{\left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5x^2}{r^2}\right) + 2d_1x\right]a^2 + \left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5y^2}{r^2}\right) + 2d_2y\right]b^2 + \left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) + 2d_3z\right]c^2\right\}$.

129. $\mathbf{F}=\frac{eQ}{z^2}\left[\left(1-\frac{3R^2}{2z^2}\right)\mathbf{1}_z-\frac{2R}{\pi z}\mathbf{1}_y\right].$

130. $\Delta F_x=\frac{3Qex}{10r^7}\left[5\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)-r^2\left(3a^2+b^2+c^2\right)\right],$

$$\Delta F_y=\frac{3Qey}{10r^7}\left[5\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)-r^2\left(a^2+3b^2+c^2\right)\right],$$

$$\Delta F_z=\frac{3Qez}{10r^7}\left[5\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)-r^2\left(a^2+b^2+3c^2\right)\right].$$

131. $U=-3888\frac{e^2a^4}{L^5}.$

§ 10. Couche bipolaire

132. $\varphi(z)=2\pi\tau\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\frac{z}{|z|}$ pour $z\neq 0$, $\varphi(0)=0$;

$$E_x=E_y=0,\quad E_z=\frac{2\pi\tau R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

133. $\varphi(z)=2\pi\tau\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ pour $z>R$, $\varphi(R)=-\sqrt{2}\pi\tau$,

$$\varphi(z)=-2\pi\tau\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\text{ pour } z<R.$$

134. En coordonnées cylindriques, $\varphi=2\tau(\pi-\psi)$ pour $0<$ $<\psi<2\pi$, $\varphi=0$ pour $\psi=0$; $E_r=E_z=0$, $E_\psi=2\tau/r$.

135. $F_x=F_y=0$, $F_z=-\frac{2\pi\tau eR^2}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}.$

136. Au-dessus de la face positive de la couche bipolaire, $\varphi =$ $= 2\pi\tau$. Sur sa surface, $\varphi = 0$. Au-dessous de la face négative, $\varphi =$ $= -2\pi\tau$.

137. Le potentiel de la couche bipolaire $\varphi = \tau\Omega$ où Ω est l'angle solide sous lequel la face positive de la couche est vue du point d'observation (pour la face négative, les raisonnements sont analogues). Supposons que la couche se déplace parallèlement à elle-même d'une quantité $d\mathbf{a}$. Alors, un élément $d\mathbf{l}'$ de contour L sur lequel est tendue la couche considérée balayera une surface $d\mathbf{a}\times d\mathbf{l}'$. Cette surface est vue du point d'observation sous l'angle solide $\frac{d\mathbf{a}\times d\mathbf{l}')\mathbf{R}}{R^3}$ où le vecteur $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ est porté de l'élément de surface vers le point d'observation. La variation totale de l'angle solide lors de la translation de la couche est

$$d\Omega=d\mathbf{a}\oint_L\frac{d\mathbf{l}'\times\mathbf{R}}{R^3}. \qquad (1)$$

Le potentiel au point d'observation variera respectivement d'une quantité $d\varphi = \tau\, d\Omega$. Si la couche est immobile et le point d'observation s'est déplacé dans le sens opposé d'une quantité $d\boldsymbol{\varepsilon} = -d\mathbf{a}$, la valeur numérique de l'angle solide (1) ne changera pas. Pourtant, la variation du potentiel s'exprime dans ce cas par l'intensité du champ électrique sous la forme

$$d\varphi = -d\boldsymbol{\varepsilon}\tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = -d\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}.$$

Le vecteur $d\boldsymbol{\varepsilon}$ étant arbitraire, on trouve

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

CHAPITRE II

CHAMP MAGNÉTIQUE STATIQUE

§ 1. Equations de Maxwell et conditions aux limites en magnétostatique

138. Si le champ magnétique donné satisfait aux équations homogènes de Maxwell rot $\mathbf{H} = 0$ et div $\mathbf{H} = 0$, il existera a priori une telle distribution de courant à l'extérieur de la cavité et sur sa surface qui produit ce champ. Au contraire, si le rotationnel ou la divergence du vecteur $\mathbf{H}$ à l'intérieur de la cavité sont non nuls, aucune distribution de courant ne peut créer le champ magnétique considéré. Il est donc nécessaire de calculer le rotationnel et la divergence de la fonction vectorielle donnée:

a) oui: (rot $\mathbf{H} = 0$, div $\mathbf{H} = 0$);

b) non: (rot $\mathbf{H} = (\mathbf{1}_x + \mathbf{1}_y + \mathbf{1}_z)\, b$, div $\mathbf{H} = 0$);

c) oui: (rot $\mathbf{H} = 0$, div $\mathbf{H} = 0$).

139. Non, parce que div $\mathbf{j} \neq 0$.

140. a) $\mathbf{j} = \frac{c}{2\pi}\left[f(r)\,\mathbf{a} + \frac{df(r)}{dr}\,\frac{(\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}))}{2r}\right]$;

b) $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,[3\,(\mathbf{ar})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{r}]$;

c) $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \frac{acr}{4\pi}\sin\theta$ pour $r \leqslant R$, $\mathbf{j} = 0$ pour $r > R$;

d) $\mathbf{j}_r = 0$, $j_\psi = \frac{bcr}{2\pi}$, $j_z = \frac{gc}{2\pi}$ pour $r \leqslant R$, $\mathbf{j} = 0$ pour $r > R$.

144. De l'équation de Maxwell rot $\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ il résulte que div $\mathbf{j} = 0$. Cela signifie que l'intérieur de la région limitée donnée est parcouru par des courants fermés dont les lignes de courant sont des courbes fermées. On pourra donc décomposer l'intégrale de volume en une somme d'intégrales

$$\int \mathbf{j}\, dV = \sum_i J_i \oint_{L_i} d\mathbf{l}_i \qquad (1)$$

prises sur des tubes suffisamment minces et fermés auxquels on peut appliquer le remplacement

$$\mathbf{j}\, dV_i \rightarrow J_i\, d\mathbf{l}_i,$$

où J_i est le courant filiforme dans le i-ième tube et $d\mathbf{l}_i$ l'élément d'axe L_i de ce tube de courant. L'axe de chaque tube est dirigé suivant des lignes de courant fermées correspondantes. L'égalité (1) est d'autant plus précise que les tubes de courants choisis sont plus minces. L'intégrale de ligne $\oint\limits_{L_i} d\mathbf{l}_i$ est nulle de même que la somme des vecteurs formant un polygone fermé. C'est pourquoi $\int \mathbf{j}\, dV = 0$.

145. Pour un volume quelconque V on a

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int\limits_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{c} \int\limits_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV',$$

où on a utilisé $\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. Dans cette dernière intégrale, la divergence est calculée par rapport aux coordonnées avec prime. En se servant du théorème de Gauss-Ostrogradsky (A1.15), on trouve

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \oint\limits_S \frac{j_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'. \qquad (1)$$

Si les courants circulent dans un volume limité V, alors $j_n(\mathbf{r}')$ s'annule sur la surface d'intégration et la condition de Lorentz est satisfaite. Dans le cas où les courants circulent dans un espace illimité, l'intégrale de surface (1) devient elle aussi nulle quand le volume V est étendu dans tous les sens. Cela tient à ce que la surface S croît proportionnellement à r'^2, alors que la fonction sous le signe de l'intégrale décroît plus vite que $1/r'^2$.

146. Le courant constant doit circuler dans une région limitée. Dans ce cas, l'expression $\frac{1}{2c} \int \mathbf{jA}\, dV$ est invariante par rapport au changement d'état pris pour zéro (II.10) et s'interprète physiquement comme énergie d'un champ magnétique.

148. a) $i_x = i_y = 0$, $i_z = \frac{cH}{4\pi}$ dans le plan $x = a$, $i_x = i_y = 0$, $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$ dans le plan $x = b$;

b) $i_x = i_y = 0$, $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$ dans les plans $x = a$ et $x = b$,

c) $i_r = i_z = 0$, $i_\psi = \frac{cH}{4\pi}$, où l'axe des Z du système de coordonnées cylindriques est dirigé suivant l'axe de la surface cylindrique parallèlement au vecteur $\mathbf{H}$.

149. a) En coordonnées cylindriques: $\mathbf{j} = \delta(r - R)\, \mathbf{i}_0$;
b) en coordonnées cartésiennes: $\mathbf{j} = J\delta(x)\, \delta(y)\, \mathbf{1}_z$;
c) en coordonnées cartésiennes: $\mathbf{j} = \delta(z)\, \mathbf{i}_0$;

d) en coordonnées cylindriques: $j_r = j_z = 0$, $j_\psi = J\delta(r - R)\delta(z)$;

e) en coordonnées sphériques: $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \sigma\omega r\delta(r - R)\sin\theta$;

f) en coordonnées sphériques: $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \sigma\omega\sin\theta_0\delta \times (\theta - \theta_0)$.

150. Non, parce que $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$ où $\mathbf{j} = i_0\delta(x)(\mathbf{1}_y e^{-ay^2} + \mathbf{1}_z e^{-az^2})$.

151. a) Les plans $x = a$ et $x = -a$ sont parcourus par un courant de densité superficielle $\mathbf{i}_0$; b) les droites $x = a$ et $x = -a$ situées dans le plan XY sont parcourues par un courant filiforme J circulant parallèlement à l'axe des Y.

152. Appuyons sur le contour L une surface quelconque S qui transforme l'espace environnant en un domaine simplement connexe. En des points qui ne se situent pas sur le contour L parcouru par le courant, l'équation de Maxwell (II.2) est homogène: $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. En vertu du théorème (A1.22), le champ magnétique en ces points peut être représenté sous la forme $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\Phi$ où $\Phi = \Phi(x, y, z)$ est une certaine fonction donnée dans le domaine simplement connexe. Prenons-la sous une forme telle que la deuxième équation de Maxwell $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ soit satisfaite elle aussi lorsqu'on y introduit l'expression $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\Phi$. A cet effet, la fonction Φ doit être solution de l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ avec la condition supplémentaire qui découle du théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique

$$\oint_C \mathbf{H}\boldsymbol{\tau}\, dl = \frac{4\pi}{c} J. \tag{1}$$

Ici, $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur unitaire de la tangente au contour à intégration C traversé par le courant filiforme J. En outre, à l'infini, la fonction Φ s'annule si le contour L parcouru par le courant se situe dans un domaine limité. La fonction Φ ainsi définie s'appelle potentiel scalaire de champ magnétique.

La surface S s'appuyant sur le contour L parcouru par le courant coupera le contour à intégration C en un certain point. Désignons par des points 2 et 1 l'origine et l'extrémité du contour coupé C'. Les valeurs du potentiel en ces points, de part et d'autre de la surface S, seront désignées par Φ_2 et Φ_1. L'intégrale (1) prise sur le contour coupé est

$$-\int_{C'} \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\, dl = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{4\pi}{c} J. \tag{2}$$

Comme on le voit, le potentiel scalaire Φ subit une variation en forme de saut au passage à travers la surface S s'appuyant sur le contour de courant L, bien que la dérivée $\partial\Phi/\partial\tau$ reste continue. Dans ce cas, la valeur de Φ coïncide de façon formelle avec le potentiel

d'une couche bipolaire S dont la densité de moment électrique dipolaire est J/c. Ainsi, le potentiel scalaire Φ satisfait à l'équation $\nabla^2\Phi = 0$ et à la condition supplémentaire (2) sur la surface fixée S s'appuyant sur le contour de courant L.

153. On choisira comme surface fixée, s'appuyant sur le contour de courant, un demi-plan $y = 0$, $x \geqslant 0$. On cherchera la solution de l'équation $\nabla^2\Phi = 0$ avec la condition supplémentaire

$$\oint\limits_{C'_r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dl = -\frac{4\pi}{c} J$$

en coordonnées cylindriques. Ici, le contour à intégration C'_r est une circonférence de rayon arbitraire r centrée sur l'axe des Z. Son plan est perpendiculaire au courant filiforme J. Le contour à intégration C'_r est coupé en un certain point par le demi-plan $y = 0$, $x \geqslant 0$.

Des hypothèses du problème on déduit que la fonction cherchée Φ ne dépend pas des coordonnées z et r et varie avec l'angle polaire ψ suivant une loi linéaire $\Phi = \Phi_0 + a\psi$ où Φ_0 et a sont des constantes. La condition supplémentaire est satisfaite pour $a = -2J/c$ et un Φ_0 arbitraire. Ainsi, le potentiel est déterminé à un terme arbitraire près. On obtient en définitive

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{2J}{c}\psi, \quad H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J}{cr}.$$

La fonction Φ varie par bond de $\frac{4\pi}{c} J$ au passage à travers le demi-plan $y = 0$, $x \geqslant 0$ qui confine avec le courant filiforme J. Si l'on pose la constante arbitraire égale à $\Phi_0 = \frac{4\pi}{c} J$, la valeur de Φ coïncide de façon formelle avec celle du potentiel d'une couche bipolaire $y = 0$, $x \geqslant 0$ dont la densité de moment électrique dipolaire est J/c (voir problème 134).

§ 2. Moment magnétique

154. $\mu_x = \mu_y = 0$, $\mu_z = \frac{e\hbar}{2mc}$.

155. $\mu = \frac{4\pi a}{c} \int\limits_0^\infty r^2 F(r)\, dr$.

156. $\mu = -\frac{a}{c}$.

157. $\omega = \frac{5mc^2}{2\hbar} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^2$. Si la charge est étendue sur la surface de la sphère, la vitesse angulaire sera 5/3 fois plus faible.

La conception de l'électron comme de la sphère chargée en rotation est en contradiction avec le postulat fondamental de la théorie de la relativité selon lequel la vitesse de mouvement des points matériels ne dépasse pas la vitesse da la lumière dans le vide. Or, dans le modèle classique considéré de l'électron, la vitesse linéaire $v = \omega R$ des points périphériques d'une sphère en rotation est de deux ordres de grandeur supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. C'est ainsi que dans le cas d'une sphère pleine on a $\frac{v}{c} = \frac{5}{2} \frac{\hbar c}{e^2}$, où $\frac{\hbar c}{e^2} = 137$.

158. On passera au système de coordonnées avec prime $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$ dans lequel la distribution de densité volumique de courant se décrit par la fonction $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{j}(\mathbf{a} + \mathbf{r}')$ et le moment magnétique par

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}'(\mathbf{r}')\, dV'.$$

Après changement de variables d'intégration $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, il vient

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2c} \left(\mathbf{a} \times \int \mathbf{j}\, dV \right).$$

Puisque le vecteur $\mathbf{a}$ est arbitraire, le deuxième terme s'annule dans le cas où

$$\int \mathbf{j}\, dV = 0. \qquad (1)$$

Pour les courants circulant dans un domaine fini, la relation (1) a été obtenue dans le problème 144.

Si les courants circulent dans un espace indéfini, l'intégrale impropre (1) sera définie par

$$\int_{V \to \infty} \mathbf{j}\, dV = \mathbf{I}. \qquad (2)$$

On multipliera scalairement les deux membres de l'égalité (2) par un vecteur constant arbitraire $\mathbf{l} \equiv \operatorname{grad}(\mathbf{r}\mathbf{l})$. Sous le signe de l'intégrale, on utilisera l'identité

$$\mathbf{j} \operatorname{grad}(\mathbf{r}\mathbf{l}) \equiv \operatorname{div}[(\mathbf{r}\mathbf{l})\, \mathbf{j}]$$

et on transformera, pour un certain volume fixe V, l'intégrale de volume en intégrale de surface

$$\oint_S (\mathbf{r}\mathbf{l})\, j_n\, dS = \mathbf{l}\mathbf{I}, \qquad (3)$$

où S est une surface fermée qui limite le volume fixe V. Puis, on passera à la limite $S \to \infty$, en étendant la surface fermée dans tous les sens, ce qui correspond au passage à la limite $V \to \infty$.

A l'infini, la densité volumique de courant **j** décroît plus vite que $1/r^4$ parce que le moment magnétique a une valeur finie. Puisque S augmente proportionnellement à r^2, l'intégrale de surface (3) s'annule quand $S \to \infty$. C'est pourquoi $\mathbf{II} = 0$. Le vecteur $\mathbf{l}$ étant arbitraire, l'intégrale (2) est aussi nulle. La relation (1) et l'égalité $\mu = \mu'$ sont démontrées.

159. $W = \mu\mathbf{H}$.

Indication. On se servira de la relation $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r})$.

160. $W = \frac{QR^2}{4c}(\omega\mathbf{H})$.

161. Ecrivons le moment des forces sous la forme

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c}\int (\mathbf{rH})\,\mathbf{j}\,dV - \frac{\mathbf{H}}{c}\int (\mathbf{rj})\,dV.$$

En utilisant le remplacement (II.17), décomposons les intégrales de volume en une somme des intégrales de lignes prises sur les axes L_i des tubes de courant minces

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c}\sum_i J_i\left[\oint_{L_i}(\mathbf{rH})\,d\mathbf{l}_i - \mathbf{H}\oint_{L_i}(\mathbf{r}\,d\mathbf{l}_i)\right]. \qquad (1)$$

Appliquons à la deuxième intégrale le théorème de Stokes (A1.17)

$$\oint_{L_i}\mathbf{r}\,d\mathbf{l}_i = \int_{S_i}\operatorname{rot}\,\mathbf{r}\,dS_i = 0,$$

et utilisons dans la première la formule (A1.10), il vient

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c}\sum_i J_i\int_{S_i}(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\,dS_i = \frac{1}{c}\sum_i J_i(\mathbf{S}_i\times\mathbf{H}) = \sum_i \mu_i\times\mathbf{H} = \mu\times\mathbf{H}.$$

Ici, $\mathbf{S}_i$ est le vecteur aire de la surface s'appuyant sur le contour du i-ième tube de courant:

$$\mathbf{S}_i = \int_{S_i} d\mathbf{S}_i,$$

et μ_i est le moment magnétique du courant filiforme J_i.

162. $\mathbf{N} = \frac{\pi}{c}hR^3\sigma(\omega\times\mathbf{H})$.

163. Introduisons la notation $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, $\mathbf{j}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') \equiv \mathbf{j}'(\mathbf{r}')$, où $\mathbf{R}$ est le rayon vecteur d'un point fixe à l'intérieur du domaine considéré de l'espace, et passons à l'intégration par rapport aux coordonnées avec prime

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}'(\mathbf{r}')\times\mathbf{H}(\mathbf{R}+\mathbf{r}')\,dV'.$$

Puis, utilisons le développement en série de Taylor

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}+\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H}(\mathbf{R}) + \ldots,$$

où l'opérateur ∇ s'applique aux coordonnées du point fixe de rayon vecteur **R**. En première approximation non nulle on a

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}'(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H}\,dV',$$

où $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$. Puis, appliquons les formules

$$(\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H} = \operatorname{grad}(\mathbf{r}'\mathbf{H}),$$
$$\operatorname{rot}\,[(\mathbf{r}'\mathbf{H})\,\mathbf{j}'] = \operatorname{grad}(\mathbf{r}'\mathbf{H}) \times \mathbf{j}',$$

dans lesquelles la dérivation se fait par rapport aux composantes du rayon vecteur **R**. Alors, l'expression pour la force cherchée prend une forme plus commode

$$\mathbf{F} = -\operatorname{rot}\left[\frac{1}{c}(\mathbf{r}'\mathbf{H})\,\mathbf{j}'(\mathbf{r}')\,dV'\right].$$

L'intégrale ainsi obtenue a été calculée lors de la résolution du problème 161. Elle est égale au produit vectoriel du moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant et du vecteur **H**. On obtient finalement

$$\mathbf{F} = -\operatorname{rot}(\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}),$$

où la fonction vectorielle $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$ est dérivée par rapport aux coordonnées du point fixe de rayon vecteur **R**, qui se situe à l'intérieur du domaine parcouru par le courant.

§ 3. Champ magnétique à grande distance d'un courant-source

164. $\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}$, $\boldsymbol{\mu}$ est le moment magnétique de l'ellipsoïde en rotation $\mu = \frac{Qa^2\omega}{5c}$.

165. $\mathbf{A} = \frac{Qh^2}{4cr^3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{H} = \frac{Qh^2}{4cr^5}[3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\mathbf{r} - r^2\boldsymbol{\omega}]$.

166. $\mathbf{H} = \frac{\sqrt{3}\,a^2J}{4cr^5}[3(\mathbf{n}\mathbf{r})\,\mathbf{r} - r^2\mathbf{n}]$. Le vecteur unitaire **n** de la normale au plan du triangle forme avec le sens du courant J un trièdre direct.

167. $W = \left(\frac{QR^2}{3c}\right)^2\left(\frac{3(\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2}{r^3}\right)$. Le rayon vecteur **r** est mené du centre de la première sphère vers le centre de la deuxième sphère.

168. $\mathbf{F} = \frac{9Qh^2}{20c}\left(\frac{(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{5(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^7}\right)$.

§ 4. Loi de Biot et Savart

170. Appliquons la formule (II.16), en plaçant l'origine des coordonnées au centre de la sphère et en dirigeant l'axe des Z le long du vecteur $\boldsymbol{\omega}$. Alors, l'intensité du champ magnétique au centre de la sphère s'écrira

$$\mathbf{H}(0)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})}{r^3}\,dV,$$

où le signe $'$ de la variable d'intégration est omis. La rotation de la sphère fera naître à son intérieur un courant de densité volumique $\mathbf{j}(\mathbf{r})=\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, où $\rho=\frac{3Q}{4\pi R^3}$. En trouvant le double produit vectoriel dans l'expression sous le signe de l'intégrale on obtient

$$\mathbf{H}(0)=\frac{1}{c}\int\rho\frac{r^2\boldsymbol{\omega}-\omega z\mathbf{r}}{r^3}\,dV.$$

Les intégrales contenant zx et zy s'annulent en tant qu'intégrales d'une fonction impaire dans des limites symétriques. Les termes restants donnent

$$\mathbf{H}(0)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}\int\frac{\rho\sin^2\theta}{r}\,dV.$$

La formule obtenue est valable pour tout corps de révolution à l'intérieur duquel est répartie une charge avec une densité volumique $\rho=\rho(r,\theta)$. En particulier, pour une sphère uniformément chargée, on trouve

$$\mathbf{H}(0)=\frac{Q\boldsymbol{\omega}}{cR}.$$

Si la charge est répartie sur la surface, l'intensité du champ magnétique au centre de la sphère sera 3/2 fois plus faible.

171. $\mathbf{H}=\frac{\pi}{c}h\sigma\boldsymbol{\omega}.$

172. $H_x=H_y=0,\quad H_z=\frac{2e\hbar}{405mca^3}.$

173. $\Delta\mathbf{H}=-\frac{e^2\mathbf{H}_0}{3amc^2}.$

174. $\mathbf{H}=\frac{Q(\omega_1-\omega_2)\boldsymbol{\omega}_1}{2c\omega_1R}$. L'intensité du champ magnétique au centre de la sphère s'annule si les charges des première et deuxième moitiés de la sphère sont $Q_1=\omega_2Q/(\omega_1+\omega_2)$, $Q_2=\omega_1Q/(\omega_1+\omega_2)$.

175. $\mathbf{H}=\frac{Q\boldsymbol{\omega}}{c(b^2-a^2)}\left(b-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\ (a>b);$

$$\mathbf{H}=\frac{Q\boldsymbol{\omega}}{c(b^2-a^2)}\left(b-\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)(b>a).$$

176. $\mathbf{H}=\frac{Q\omega}{cR}\left(1-\cos\theta_0\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)$.

177. $W=\frac{3(3\sqrt{2}-4)\,Q\mu\omega}{2hc}$.

178. $W=\frac{e\hbar\mu}{24mca^3}$.

179. $\mathbf{H}=\frac{8\mu_0}{3a^3}$, $\quad W=\frac{8\mu\mu_0}{3a^3}$.

180.

$$\mathbf{N}=\frac{3Q}{2c}\left(\frac{b}{b^2-a^2}-\frac{a^3}{\sqrt{(b^2-a^2)^3}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\omega}).$$

181. $\mathbf{H}=2\pi\sigma|z|\left[\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}+\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}-2\right]\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}$;

$$\mathbf{H}=\frac{\pi\sigma R^4\boldsymbol{\omega}}{2c|z|^3} \text{ pour } |z|\gg R; \quad \boldsymbol{\mu}=\frac{\pi\sigma R^4\boldsymbol{\omega}}{4c}.$$

182. $\mathbf{A}=\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$, $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{a}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}-\frac{3\mathbf{a}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$.

Le vecteur $\mathbf{a}$ est proportionnel au moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du courant donné suivant la formule $\mathbf{a} = -c\boldsymbol{\mu}$.

183. Le potentiel vecteur produit par le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')\,dV'$ de l'élément de volume dV' est de la forme

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\,dV',$$

où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')=\boldsymbol{\mu}_0F(r')$, $R=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont les rayons vecteurs du point d'observation et du point d'emplacement de l'élément de volume dV'. En appliquant le principe de superposition, on obtient pour un volume quelconque V

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\int_V\frac{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\,dV'=\int_V\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')\times\operatorname{grad}'\frac{1}{R}\,dV'.$$

En se servant des formules (A1.30) et (A1.18), mettons la dernière intégrale sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int_V\frac{c\operatorname{rot}'\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')}{R}\,dV'-\oint_S\frac{\mathbf{n}\times\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')}{R}\,dS'.$$

Faisons tendre le volume V vers l'infini, en l'étendant indéfiniment dans tous les sens. Dans ce cas, l'intégrale de surface devient nulle parce que quand $S\to\infty$, l'expression sous le signe de cette intégrale décroît plus vite que $1/r'^2$. En rapprochant le résultat obtenu de la formule générale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

on arrive à la conclusion que la distribution de moment magnétique produit un même champ magnétique que celui créé par un courant de densité volumique

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = c \operatorname{rot} (\mu_0 F(r)).$$

184. Plaçons l'origine des coordonnées au sommet de l'angle droit et dirigeons les axes des X et Z dans le sens du courant. Alors on obtient

$$\text{a) } \mathbf{H} = \frac{J}{cx} \mathbf{1}_y ; \quad \text{b) } \mathbf{H} = \frac{J}{cy} (\mathbf{1}_z - \mathbf{1}_x).$$

185. $\mathbf{H} = -\frac{2J}{cr}(1+\sqrt{2})\,\mathbf{1}_y$ où r est la distance du point d'observation à l'origine des coordonnées.

186. $\mathbf{H} = \frac{2J}{\sqrt{3}\,ca}\mathbf{n}$ où le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de la normale au plan du triangle forme avec le sens du courant J un trièdre direct.

187. $\mathbf{H} = \frac{8a^2 J \mathbf{n}}{c(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}}$ où le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de la normale au plan du carré forme avec le sens du courant J un trièdre direct; $\boldsymbol{\mu} = \frac{4Ja^2}{c}\mathbf{n}$.

188. $\mathbf{H} = \frac{\pi J}{cR}\mathbf{n}$ où le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de la normale au plan du demi-cercle forme avec le sens du courant parcourant l'arc un trièdre direct.

189. $\mathbf{H} = \frac{2\pi R^2 J \mathbf{n}}{c(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{2\boldsymbol{\mu}}{(z^2+R^2)^{3/2}}$ où le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de la normale au plan de l'anneau forme avec le sens du courant J un trièdre direct.

§ 5. Théorème sur la circulation de l'intensité de champ magnétique

190. La distribution du courant ayant une symétrie cylindrique, la façon la plus simple d'agir est d'utiliser le théorème sur la circulation de l'intensité $\mathbf{H}$ de champ magnétique (II.8). Par raison de symétrie cylindrique, le vecteur $\mathbf{H}$ est en tout point de l'espace perpendiculaire à l'axe du cylindre et dirigé suivant la tangente à la circonférence centrée sur son axe. Les sens des vecteurs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{j}$ sont liés entre eux comme dans la loi de Biot et Savart. Le module du vecteur $\mathbf{H}$ ne dépend que de la distance à l'axe du cylindre. Les assertions que nous venons d'exposer déterminent de façon univoque la forme du contour à intégration auxiliaire dans la formule (II.8).

Pour trouver l'intensité $\mathbf{H}_1$ du champ magnétique à l'intérieur du cylindre en un point fixe situé à la distance r de son axe, menons par ce point une circonférence C_r de rayon r centrée sur l'axe indiqué

et calculons la circulation du vecteur $\mathbf{H}_1$:

$$\oint_{C_r} \mathbf{H}_1\, d\mathbf{l} = H_1 \oint_{C_r} dl = 2\pi r H_1.$$

Le courant embrassé par la circonférence auxiliaire C_r est

$$\int \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \pi r^2 j.$$

Après les calculs effectués, la relation (II.8) se transforme en une équation algébrique par rapport à H_1, d'où on trouve

$$H_{1\psi} = H_1 = \frac{2\pi j r}{c}, \quad H_{1r} = H_{1z} = 0.$$

En opérant de façon identique, on calcule l'intensité $\mathbf{H}_2$ du champ magnétique à l'extérieur du cylindre:

$$H_{2\psi} = \frac{2\pi R^2 j}{cr}, \quad H_{2r} = H_{2z} = 0.$$

Par raison de symétrie axiale on a $A_r = A_\psi = 0$, $A_z = A_z(r)$. Donc, pour l'intérieur et l'extérieur du cylindre la relation $\mathbf{H} = \text{rot}\, \mathbf{A}$ prend la forme

$$\frac{dA_{1z}}{dr} = -\frac{2\pi j}{c} r \qquad (r \leqslant R),$$

$$\frac{dA_{2z}}{dr} = -\frac{2\pi R^2 j}{cr} \qquad (r \geqslant R).$$

L'intégration de ces équations, compte tenu des conditions supplémentaires $A_{1z}(R) = A_{2z}(R) = 0$, donne

$$A_{1z} = \frac{\pi j}{c}(R^2 - r^2), \quad A_{2z} = \frac{2\pi R^2 j}{c} \ln \frac{R}{r}.$$

191. Pour $r \leqslant R$:

$$H_{1r} = H_{1z} = 0, \quad H_{1\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r j(\eta)\, \eta\, d\eta,$$

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{4\pi}{c} \int_r^R \frac{1}{\xi} \int_0^\xi j(\eta)\, \eta\, d\eta\, d\xi;$$

pour $r \geqslant R$:

$$H_{2r} = H_{2z} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^R j(\eta)\, \eta\, d\eta,$$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \int_0^R j(\eta)\, \eta\, d\eta \ln \frac{R}{r}.$$

192. La valeur absolue de la force cherchée est donnée par la formule

$$F = \frac{4J^2}{3\pi c^2 R}.$$

193. $\mathbf{H}_1 = 0$ pour $r < R$; $H_{2r} = H_{2z} = 0$, $H_{2\psi} = \frac{4\pi R i_0}{cr}$ pour $r > R$.

194. $H_x = H_z = 0, \quad H_y = -\frac{2\pi i_0 z}{c|z|}$.

195. $\mathbf{H}_1 = 0$ pour $r \leqslant R_1$; $H_{2r} = H_{2z} = 0$, $H_{2\psi} = \frac{2\pi j (r^2 - R_1^2)}{cr}$ pour $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; $H_{3r} = H_{3z} = 0$, $H_{3\psi} = \frac{2\pi j (R_2^2 - R_1^2)}{cr}$ pour $r \geqslant R_2$

196. $\mathbf{H}_1 = \frac{4\pi j z}{c} \mathbf{1}_x$ pour $|z| \leqslant l$,

$\mathbf{H}_2 = \frac{4\pi j l z}{c|z|} \mathbf{1}_x$ pour $|z| \geqslant l$.

197. $$H_x = \frac{2J}{c}\left(\frac{y}{(x+l)^2+y^2} - \frac{y}{(x-l)^2+y^2}\right),$$

$$H_y = \frac{2J}{c}\left(\frac{x-l}{(x-l)^2+y^2} - \frac{x+l}{(x+l)^2+y^2}\right),$$

$$H_z = 0;$$

$$\mathbf{H} = \frac{4Jl}{cr^2}\left[\left(\frac{2x^2}{r^2} - 1\right)\mathbf{1}_y - \frac{2xy}{r^2}\mathbf{1}_x\right] \text{ pour } r \gg l.$$

198. $$r = \frac{a}{\exp\left(\frac{c\Phi_0}{2aJ}\right) - 1}.$$

199. Le cadre est attiré par le courant rectiligne avec une force

$$F = \frac{2a^2 J_1 J_2}{c^2 r (r+a)}.$$

200. Pour les courants antiparallèles

$$\mathbf{H}_1 = 0 \qquad \text{pour } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{4\pi i_0}{c}\mathbf{1}_x \text{ pour } |z| < l;$$

pour les courants parallèles

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4\pi i_0 z}{c|z|}\mathbf{1}_x \text{ pour } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = 0 \qquad \text{pour } |z| < l.$$

201. $\mathbf{H}=0$ pour $z>0$, $H_r=H_z=0$ et $H_\psi=\frac{2J}{cr}$ pour $z<0$; $H_{1r}=H_{1z}=0$, $H_{1\psi}=\frac{J}{cr}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$; $H_{2r}=H_{2z}=0$, $H_{2\psi}=$ $=\mp\frac{J}{cr}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$, où le signe supérieur est pris pour $z>0$ et le signe inférieur pour $z<0$. Ici, r et z sont les coordonnées cylindriques du point d'observation.

202. $\mathbf{H}=0$ à l'intérieur de la sphère; $H_r=H_z=0$ et $H_\psi=$ $=\frac{2J}{cr}$ à l'extérieur de la sphère, r étant la distance à l'axe des z.

203. La circulation de l'intensité de champ magnétique s'écrira

$$\oint \mathbf{H}(\mathbf{r})\,d\mathbf{l}=-\frac{J}{c}\oint_L\oint_{L'}\left(d\mathbf{l}'\times\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)d\mathbf{l}, \tag{1}$$

où $\mathbf{R}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$. Effectuons une permutation cyclique des facteurs dans le produit mixte et considérons l'intégrale par rapport à la variable avec prime. A cet effet, appuyons sur le contour de courant L' une surface fixe S' qui transforme l'espace environnant en un domaine simplement connexe et coupe en un certain point le contour fermé L. Appliquons à l'intégrale par rapport à la variable avec prime le théorème de Stokes (A1.17):

$$-\oint_{L'}\oint_L\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\times d\mathbf{l}\right)d\mathbf{l}'=-\int_{S'}\mathrm{rot}'\int_1^2\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\times d\mathbf{l}\right)d\mathbf{S}'=$$

$$=\int_{S'}\int_1^2\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\times d\mathbf{l}\right)d\mathbf{S}'=\int_{S'}\int_1^2\left[(d\mathbf{l}\nabla)\frac{\mathbf{R}}{R^3}-d\mathbf{l}\,\mathrm{div}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right]d\mathbf{S}',$$

où les chiffres 1 et 2 désignent l'origine et l'extrémité du contour coupé L, qui sont situées de part et d'autre de la surface S' tout en la touchant en un seul et même point. L'intégrale du deuxième terme s'annule parce que

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}=\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

et, lors de l'intégration, $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$.

La quantité $\frac{\mathbf{R}d\mathbf{S}'}{R^3}\equiv d\Omega$ est l'angle solide sous lequel l'élément de surface $d\mathbf{S}'$ est vu d'un point situé sur le contour L. Cela signifie que l'intégrale par rapport à la variable avec prime est égale à l'angle solide $\Omega=\Omega(\mathbf{r})$ sous lequel du point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ on voit la surface S' s'appuyant sur le contour L'. La quantité $\Omega(\mathbf{r})$ est positive si la normale $\mathbf{n}'$ à la surface $\mathbf{S}'$ est dirigée à partir du point d'observation, elle est négative dans le cas contraire.

Désignons par Ω_1 et Ω_2 les valeurs de l'angle solide Ω (**r**) aux points 1 et 2. L'intégrale prise sur le contour coupé L entre les points 1 et 2 est facile à calculer

$$\int_1^2 (d\mathbf{l}\nabla)\,\Omega = \int_1^2 \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{grad}\,\Omega\,dl = \int_1^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\,dl = \Omega_2 - \Omega_1.$$

Pour fixer les idées, admettons qu'au point où le contour L est coupé par la surface S' les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{n}'$ forment un angle aigu. Alors, le saut $\Omega_2 - \Omega_1$ de l'angle solide Ω (**r**) à la traversée de la surface S' est égal à 4π. Ainsi, l'intégrale au second membre de l'égalité est égale à $\frac{4\pi}{c} J$.

204. Remplissons la cavité de la surface cylindrique de rayon R d'un courant uniformément réparti avec une densité volumique **j** et d'un courant antiparallèle avec une densité volumique $-\mathbf{j}$. Cette opération laissera inchangé le champ magnétique du système primitif mais elle le remplacera par deux cylindres pleins de rayons R_1 et R_2 parcourus par des courants antiparallèles. D'après le principe de superposition, l'intensité **H** du champ magnétique à l'intérieur du cylindre de rayon R_1 est égale à la somme des intensités $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$ produites séparément par les cylindres extérieur et intérieur, où

$$\mathbf{H}_+ = \frac{2\pi}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_- = \frac{2\pi}{c}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}).$$

Ici, **r** et **r'** sont les rayons vecteurs situés dans le plan perpendiculaire aux cylindres et portés depuis les axes de ces cylindres vers le point d'observation. L'intensité du champ magnétique résultant est uniforme et égale à

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{1}),$$

où **1** est un vecteur ayant pour origine l'axe du cylindre extérieur et pour extrémité l'axe du cylindre intérieur. $\mathbf{1} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Son module est égal à la distance entre ces axes. Le champ magnétique trouvé existe aussi à l'intérieur de la cavité cylindrique de rayon R_1 avant son remplissage par des courants antiparallèles.

205. $\mathbf{H} = \frac{2a}{cr^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{i}_0) - \frac{2\pi i_0 y}{c\,|y|}\mathbf{1}_x$ où **r** est un rayon vecteur situé dans le plan XY.

206. Les cylindres se repoussent avec une force, rapportée à l'unité de leur longueur, dont la valeur absolue est

$$F = 2\left(\frac{\pi R_1}{c}\right)^2 l j_1 j_2.$$

207. $W = \left(\frac{\pi R_1}{c}\right)^2 j_1 j_2 (l^2 + R_1^2 - R_2^2).$

§ 6. Equations de Laplace et de Poisson avec conditions supplémentaires

208. $j_r = j_\theta = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{2\pi} r \sin\theta & \text{pour } r \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$

209. $j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{\pi} r & \text{pour } r \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$

210. La sphère de rayon R est parcourue par un courant superficiel de densité

$$i_r = i_\theta = 0, \quad i_\psi = \frac{3ac}{4\pi} \sin\theta.$$

211. La fonction $f(r)$ doit satisfaire à l'équation de Laplace.

212. Le potentiel vecteur cherché est une solution particulière de l'équation

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}, \tag{1}$$

qui s'annule pour $\mathbf{j}_0 = 0$. Puisque la condition à la limite est absente et le second membre de l'équation (1) est périodique dans l'espace indéfini, le potentiel vecteur présente la même structure périodique

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos \mathbf{kr}. \tag{2}$$

Pour trouver le vecteur constant $\mathbf{A}_0$, introduisons la solution cherchée (2) dans l'équation (1) et simplifions par le facteur commun $\cos \mathbf{kr}$. Il vient finalement

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}_0}{k^2 c} \cos \mathbf{kr}.$$

L'intensité du champ magnétique se calcule par la formule (II.9):

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k})}{k^2 c} \sin \mathbf{kr}.$$

213.

$$\mathbf{A}_2 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} e^{-\lambda z} \left[\cos(k_1 x + k_2 y) + \frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1 x + k_2 y) \right] \quad (z \geqslant 0),$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} \left\{ 2 \cos \mathbf{kr} + e^{\lambda z} \left[\frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1 x + k_2 y) - \cos(k_1 x + k_2 y) \right] \right\} \quad (z \leqslant 0).$$

Indication. Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ a une orientation constante déterminée par le vecteur $\mathbf{j}_0$. La projection du potentiel vecteur sur la direction du vecteur $\mathbf{j}_0$ satisfait à l'équation et aux conditions supplémentaires qui sont les mêmes que pour le potentiel du champ électrique dans le problème 53, ce qui permet d'utiliser la méthode exposée lors de la résolution de ce problème.

214. $\mathbf{A}=\frac{2\pi \mathbf{i}_0}{cl}e^{-l|z|}\cos \mathbf{lr}.$

215.

$$\mathbf{A}=\frac{2\pi}{c}\left(\frac{\mathbf{a}_1}{l_1}e^{-l_1|z|}\cos \mathbf{l}_1\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}_2}{l_2}e^{-l_2|y|}\cos \mathbf{l}_2\mathbf{r}+\frac{\mathbf{a}_3}{l_3}e^{-l_3|x|}\cos \mathbf{l}_3\mathbf{r}\right).$$

216.

$$\mathbf{A}_1=-\mathbf{A}_0[l_2\sin l_1a-e^{-l_2a}(l_2\sin l_1a+l_1\cos l_1a)\,\mathrm{sh}\, l_2a]\times$$
$$\times e^{l_2(x+a)}\sin l_2y \quad (x\leqslant -a),$$
$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_0[l_2\sin l_1x-e^{-l_2a}(l_2\sin l_1a+l_1\cos l_1a)\,\mathrm{sh}\, l_2x]\sin l_2y \quad (|x|\leqslant a).$$
$$\mathbf{A}_3=\mathbf{A}_0[l_2\sin l_1a-e^{-l_2a}(l_2\sin l_1a+l_1\cos l_1a)\,\mathrm{sh}\, l_2a]\times$$
$$\times e^{-l_2(x-a)}\sin l_2y \quad (x\geqslant a),$$

où l'on a introduit la notation

$$\mathbf{A}_0=\frac{4\pi \mathbf{j}_0}{cl_2(l_1^2+l_2^2)}.$$

I n d i c a t i o n. Utiliser la même méthode que pour le problème 54.

217. Des hypothèses du problème on déduit $A_r = A_\psi = 0$ et $A_z = A(r, \psi)$. La fonction

$$A(r, \psi)=\begin{cases} A_1(r, \psi) & \text{pour } r\leqslant R,\\ A_2(r, \psi) & \text{pour } r\geqslant R\end{cases}$$

satisfait, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du cylindre, aux équations

$$\nabla^2 A_1=-\frac{4\pi}{c}j_0r^s\cos n\psi, \quad \nabla^2A_2=0 \tag{1}$$

et aux conditions aux limites sur la surface

$$A_1(R, \psi)=A_2(R, \psi), \quad \frac{\partial A_1(R, \psi)}{\partial r}=\frac{\partial A_2(R, \psi)}{\partial r}.$$

De plus, la fonction $A_1(r, \psi)$ est continue au point $r = 0$, alors que le potentiel vecteur à l'extérieur du cylindre ne croît pas plus vite que $\ln r$. Cette dernière assertion tient à ce que le courant total circulant à travers la section droite du cylindre est nul (d'après les résultats obtenus dans le problème 190, le potentiel vecteur produit à grande distance par un courant rectiligne indéfini croît comme $\ln r$). Les équations et les conditions supplémentaires permettent d'appliquer la méthode de séparation des variables. Puisque la fonction $\cos n\psi$ se reproduit $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\cos n\psi = -\frac{n^2}{r^2}\cos n\psi$ lorsqu'on lui applique la partie angulaire du laplacien en coordonnées sphériques (A1.40) et qu'en outre, elle est univoque sur l'axe

des X quand $\psi \to 0$ et $\psi \to 2\pi$, cherchons la solution sous la forme

$$A_1 = F_1(r)\cos n\psi, \quad A_2 = F_2(r)\cos n\psi,$$

où $F_1(r)$ est continue alors qu'à grande distance du cylindre la fonction $F_2(r)$ ne croît pas plus rapidement que $\ln r$. Après l'introduction dans l'équation (1) et la simplification par le facteur commun, on obtient

$$r^2\frac{d^2F_1}{dr^2} + r\frac{dF_1}{dr} - n^2F_1 = -\frac{4\pi}{c} j_0 r^{s+2}, \qquad (2)$$

$$r^2\frac{d^2F_2}{dr^2} + r\frac{dF_2}{dr} - n^2F_2 = 0. \qquad (3)$$

Les conditions supplémentaires pour les équations (2) et (3) sont

$$F_1(R) = F_2(R), \quad \frac{\partial F_1(R)}{\partial r} = \frac{\partial F_2(R)}{\partial r}.$$

La solution particulière de l'équation inhomogène (2) est de la forme

$$F_{1p} = \frac{4\pi j_0 r^{s+2}}{c\,[n^2 - (s+2)^2]},$$

alors que la solution des équations homogènes sera cherchée sous la forme de Cr^{ν} où les constantes C et ν se déterminent à partir des équations elles-mêmes et des conditions supplémentaires. En omettant les calculs intermédiaires, indiquons la réponse finale

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn}\frac{R^{s+2}}{n-s-2}\left[\frac{2n}{n+s+2}\left(\frac{r}{R}\right)^{s+2} - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]\cos n\psi \quad (r \leqslant R),$$

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn}\frac{R^{s+2}}{n+s+2}\left(\frac{R}{r}\right)^n\cos n\psi \quad (r \geqslant R).$$

218.

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\pi R^2 \mathbf{j}_0}{c}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n\psi \quad (r \leqslant R),$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\pi R^2 \mathbf{j}_0}{c}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-2}\cos n\psi \quad (r \geqslant R).$$

219. Le cylindre tournant produit dans l'espace un courant de densité volumique

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \rho\omega r & \text{pour } r \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

Aussi, faut-il utiliser le laplacien en coordonnées cylindriques (A1.42).

Par raison de symétrie on a $A_r = A_z = 0$ et $A_\psi = A(r)$. La fonction

$$A(r) = \begin{cases} A_1(r) & \text{pour } r \leqslant R, \\ A_2(r) & \text{pour } r > R \end{cases}$$

satisfait, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre, aux équations

$$r^2 \frac{d^2A_1}{dr^2} + r\frac{dA_1}{dr} - A_1 = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega r^3, \qquad (1)$$

$$r^2 \frac{d^2A_2}{dr^2} + r\frac{dA_2}{dr} - A_2 = 0 \qquad (2)$$

et aux conditions aux limites

$$A_1(R) = A_2(R), \quad \frac{dA_1(R)}{dr} = \frac{dA_2(R)}{dr}.$$

Le potentiel vecteur est continu en tout domaine fini de l'espace et ne croît pas à grande distance du cylindre. La dernière assertion tient à ce que le cylindre tournant peut être considéré comme un ensemble des courants circulaires. Cela signifie que le potentiel vecteur d'une portion distincte du cylindre décroît à l'infini comme $1/r^2$. Le potentiel vecteur total est égal à la somme infinie des contributions dues à toutes les portions du cylindre. Une telle sommation (ou plus exactement, une intégration) augmente la valeur du potentiel vecteur loin du cylindre et aboutit à une loi de décroissance plus faible de A_2: $A_2 \sim 1/r$.

La méthode de résolution de l'équation d'Euler (1) et (2) est exposée dans le problème 55. On obtient finalement pour $r \leqslant R$:

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{\pi}{c}\rho\omega r\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right), \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\pi}{c}\rho(R^2 - r^2)\omega;$$

pour $r \geqslant R$:

$$A_{2r} = A_{2z} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{\pi\rho\omega R^4}{2cr}, \quad \mathbf{H}_2 = 0.$$

220.

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{4\pi}{c}\int_r^R \frac{1}{\xi}\int_0^\xi j(\eta)\,\eta\,d\eta\,d\xi \quad (r \leqslant R),$$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c}\int_0^R j(\eta)\,\eta\,d\eta \ln\frac{R}{r} \quad (r \geqslant R).$$

221. En coordonnées sphériques, la distribution de densité volumique de courant se décrit par la fonction

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \rho\omega r\sin\theta & \text{pour } r \leqslant R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

De la solution générale (II.15) de l'équation de Poisson et par raison de symétrie du système, on déduit $A_r = A_\theta = 0$ et $A_\psi = A(r, \theta)$. Désignons par A_1 et A_2 le potentiel vecteur à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Compte tenu du laplacien (A1.48) en coordonnées sphériques, on trouve

$$\nabla^2 A_1 - \frac{A_1}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{4\pi}{c} \rho\omega r \sin\theta, \qquad (1)$$

$$\nabla^2 A_2 - \frac{A_2}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \qquad (2)$$

Les fonctions A_1 et A_2 sont bornées en tout point de coordonnées finies de l'espace et la fonction A_2 ne décroît pas, à grande distance de la sphère, plus lentement que $1/r^2$. Sur la surface de la sphère sont satisfaites les conditions aux limites

$$A_1(R, \theta) = A_2(R, \theta), \quad \frac{\partial A_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial A_2(R, \theta)}{\partial r}.$$

Le problème énoncé peut être résolu par la méthode de séparation des variables. En appliquant cette méthode on tiendra compte du fait qu'à grande distance de la sphère la fonction $A_2(r, \theta)$ se confond avec le potentiel vecteur du moment magnétique μ de la sphère tournante

$$A_2(r, \theta) = \frac{\mu \sin\theta}{r^2} \left(\mu = \frac{4\pi\rho R^5}{15c} \omega \right).$$

Il est donc logique de chercher la solution des équations (1) et (2) sous la forme

$$A_1 = F_1(r) \sin\theta, \quad A_2 = F_2(r) \sin\theta.$$

En introduisant les solutions cherchées dans (1) et (2) et en simplifiant par le facteur commun, on obtient les équations d'Euler

$$r^2 \frac{d^2F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} - 2F_1 = -\frac{4\pi}{c} \rho\omega r^3,$$

$$r^2 \frac{d^2F_2}{dr^2} + 2r \frac{dF_2}{dr} - 2F_2 = 0,$$

dont la résolution est décrite dans les problèmes qui précèdent (voir, par exemple, le problème 55). Indiquons le résultat final

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \qquad A_{1\psi} = \frac{2\pi}{c} \rho\omega r \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin\theta,$$

$$H_{1r} = \frac{4\pi}{c} \rho\omega \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos\theta, \quad H_{1\theta} = \frac{4\pi}{c} \rho\omega \left(\frac{2}{5} r^2 - \frac{R^2}{3} \right) \sin\theta,$$

$$H_{1\psi} = 0 \quad (r \leqslant R);$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \quad (r \geqslant R).$$

222. Une moitié de la sphère est appliquée contre l'autre avec une force

$$F = \frac{1}{15}\left(\frac{\pi\rho\omega R^3}{c}\right)^2.$$

223. Pour $r < R$:

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \qquad A_{1z} = \frac{2\pi R i_0}{cn}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi,$$

$$H_{1r} = -\frac{2\pi i_0}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \sin n\psi, \quad H_{1\psi} = -\frac{2\pi i_0}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \cos n\psi,$$

$$H_{1z} = 0;$$

pour $r > R$:

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{2\pi R i_0}{cn}\left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi,$$

$$H_{2r} = -\frac{2\pi i_0}{c}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sin n\psi, \quad H_{2\psi} = \frac{2\pi i_0}{c}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \cos n\psi,$$

$$H_{2z} = 0.$$

224. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{H}_1 = 0$ pour $r < R$;

$$\mathbf{A}_2 = \frac{4\pi R i_0}{c} \ln\frac{R}{r} + \mathbf{A}_0, \quad H_{2r} = H_{2z} = 0,$$

$$H_{2\psi} = \frac{4\pi R i_0}{cr} \text{ pour } r > R.$$

Ici, $\mathbf{A}_0$ est un vecteur constant arbitraire ayant les dimensions d'un potentiel.

225. Pour $r < R$:

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{2\pi}{c}\sigma\omega R r,$$

$$H_{1r} = H_{1\psi} = 0, \quad H_{1z} = \frac{4\pi}{c}\sigma\omega R;$$

pour $r > R$:

$$A_{2r} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{2\pi\sigma\omega R^3}{cr}, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c}\sigma v R \ln\frac{R}{r},$$

$$H_{2r} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi\sigma v R}{cr}, \quad H_{2z} = 0,$$

où l'axe des Z est choisi le long de la direction de mouvement et le terme constant arbitraire dans l'expression du potentiel vecteur est omis.

226. Pour $r < R$:

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \qquad A_{1\psi} = \frac{4\pi}{3c}\sigma\omega R r \sin\theta,$$

$$H_{1r} = \frac{8\pi}{3c}\sigma\omega R\cos\theta, \quad H_{1\theta} = -\frac{8\pi}{3c}\sigma\omega R\sin\theta, \quad H_{1\psi} = 0;$$

pour $r > R$:

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \qquad A_{2\psi} = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3cr^2} \sin\theta,$$

$$H_{2r} = \frac{8\pi\sigma\omega R^4}{3cr^3} \cos\theta, \quad H_{2\theta} = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3cr^3} \sin\theta, \quad H_{2\psi} = 0.$$

Le moment magnétique de la sphère tournante est

$$\mu = \frac{4\pi}{3c} \sigma R^4 \omega.$$

Le potentiel vecteur et l'intensité du champ magnétique s'expriment par le moment magnétique à l'aide des relations suivantes

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{R^3}, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\boldsymbol{\mu}}{R^3} \qquad (r < R),$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \quad (r > R).$$

227. Le potentiel vecteur est orienté suivant l'axe des Z et est uniforme le long de cette direction $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \psi)$. Il est commode de décomposer le courant sur la surface du cylindre en somme de deux termes $\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b$ où

$$\mathbf{i}_a = 1/2\,(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2),$$

$$\mathbf{i}_b = \begin{cases} 1/2\,(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2) & \text{pour} \quad 0 < \psi < \pi \\ 1/2\,(\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1) & \text{pour} \quad 0 < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

A ces courants correspond la somme des potentiels vecteurs $\mathbf{A}_a + \mathbf{A}_b$. La grandeur $\mathbf{A}_a$ a été calculée dans le problème 224:

$$\mathbf{A}_a = \begin{cases} \mathbf{A}_0 & \text{pour} \quad r \leqslant R, \\ \dfrac{2\pi R}{c}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \ln \dfrac{R}{r} + \mathbf{A}_0 & \text{pour} \quad r \geqslant R, \end{cases}$$

où $\mathbf{A}_0$ est un vecteur arbitraire constant ayant les dimensions d'un potentiel.

Le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_b(r, \psi) = \begin{cases} \mathbf{A}_{1b}(r, \psi) & (r \leqslant R), \\ \mathbf{A}_{2b}(r, \psi) & (r \geqslant R) \end{cases}$$

satisfait à l'équation de Laplace et à la condition à la limite sur la surface cylindrique

$$\mathbf{A}_{1b}(R, \psi) = \mathbf{A}_{2b}(R, \psi), \quad \frac{\partial \mathbf{A}_{1b}(R, \psi)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{A}_{2b}(R, \psi)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_b.$$

En outre, la fonction $\mathbf{A}_{1b}$ est bornée aux points de l'axe des Z alors que la quantité $\mathbf{A}_{2b}$ s'annule à l'infini : $\mathbf{A}_{2b}(\infty, \psi) = 0$. La dernière assertion tient à ce qu'à grande distance $r \gg R$, la surface cylindrique

parcourue par le courant $\mathbf{i}_b$ est équivalente au système de deux fils rectilignes parcourus par des courants antiparallèles dont le potentiel vecteur s'annule quand $r \to \infty$. Or, dans la réalité, pour obtenir une solution univoque du problème, il suffit d'avoir une exigence moins rigoureuse, à savoir que la fonction $\mathbf{A}_{2b}(r, \psi)$ ne croisse pas quand $r \to \infty$. Pour le reste, on opère comme dans le problème 72. Finalement, on obtient

$$\mathbf{A} = \frac{4R(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \leqslant R),$$

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi R(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)}{c} \ln\frac{R}{r} + \frac{4R(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \geqslant R).$$

§ 7. Energie d'un champ magnétique

228.

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{b}{2}\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right) r\sin\theta, \quad j_r = j_\theta = 0,$$

$$j_\psi = \frac{bc}{4\pi} r\sin\theta \quad (r \leqslant R);$$

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{bR^5}{15r^2}\sin\theta, \quad j = 0 \quad (r \geqslant R); \quad W = \frac{2b^2R^7}{315}.$$

229. $W = \frac{\mu^2}{R^3}; \quad \mu = \frac{QR^2}{3c}\omega.$

230. $W = \frac{10\mu^2}{7R^3}; \quad \mu = \frac{QR^2}{5c}\omega.$

231. $W = \frac{8\mu^2}{3R^2}; \quad \mu = \frac{qR^2}{4c}\omega.$

232. $W = \frac{2\mu^2}{R^3}; \quad \mu = \frac{\pi\sigma R^3}{c}\omega.$

233. $W = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi R i_0}{c}\right)^2.$

234. $W = 16\left(\frac{Ri}{c}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}.$

235. $A_r = A_\psi = 0, \; A_z = -\frac{2J(\mathbf{r}\mathbf{l})}{cr^2}$. L'axe des Z est confondu avec l'axe d'un des cylindres et dirigé dans le sens du courant qui

le parcourt. Le rayon vecteur **r** se situe dans le plan XY et le vecteur **l** est porté dans le même plan de l'origine des coordonnées vers l'axe de l'autre cylindre. A grande distance $r \gg l$ du cylindre, l'intensité du champ magnétique décroît d'une façon suffisamment rapide

$$H_r = \frac{2Jl \sin \psi}{cr^2}, \quad H_\psi = -\frac{2Jl \cos \psi}{cr^2}, \quad H_z = 0,$$

où ψ est l'angle formé entre les vecteurs **r** et **l**. C'est pourquoi l'énergie du champ magnétique par unité de longueur du système considéré a une valeur finie.

CHAPITRE III

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE VARIABLE

§ 1. Equations de Maxwell

236. Non.

237. Non.

238. Non.

239. Oui.

240. Si on ajoute rot **F** au vecteur **s**, la fonction vectorielle **F** = **F** (**r**, *t*) étant arbitraire, la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \qquad (1)$$

ne sera pas changée en vertu du théorème de l'analyse vectorielle

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv 0.$$

Par conséquent, la divergence de la somme $\mathbf{s} + \operatorname{rot} \mathbf{F}$ est égale elle aussi au second membre de l'égalité (1).

241. L'intensité **E** du champ électrique rotationnel est perpendiculaire au vecteur **H** et est indépendante des coordonnées ψ et z. De l'équation de Maxwell (III.1) on déduit

$$\frac{\partial}{\partial r}(rE) = -\frac{r}{c}\frac{\partial H}{\partial t},$$

où l'on a utilisé $E_r = E_z = 0$ et $E_\psi = E(r, t)$. L'intégration de la dernière équation, compte tenu du fait que pour $r = 0$ la fonction $E(r, t)$ est bornée, donne

$$E = -\frac{1}{cr}\int_0^r \xi \frac{\partial H(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Il n'est pas difficile de se convaincre, en procédant à la dérivation directe, que l'intensité **E** du champ électrique rotationnel trouvé satisfait aux équations de Maxwell $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ et $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$ dans lesquelles la fonction donnée **H** est solution de l'équation de l'onde (III.11).

242. En utilisant les résultats du problème précédent, on trouve l'intensité du champ électrique rotationnel

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2c}\,\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point d'observation ayant pour origine le centre de la sphère. Le moment des forces subies par la sphère est

$$\int (\mathbf{r}\times\rho\mathbf{E})\,dV=-\frac{QR^2}{5c}\,\frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

La dérivée, par rapport au temps, du moment cinétique de la sphère

$$\mathbf{M}=2/5\;mR^2\omega$$

est égale au moment des forces extérieures. Il en résulte une équation différentielle

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{Q}{2mc}\,\frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

dont l'intégration, compte tenu de la condition initiale, donne pour la vitesse angulaire

$$\omega=-\frac{Q\mathbf{H}}{2mc}.$$

243. Mettons le deuxième terme de l'expression placée sous le signe somme au second membre de l'égalité

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\left(\frac{\operatorname{div}\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\mathbf{j}\operatorname{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV'$$

sous une autre forme, en utilisant la formule (A1.28):

$$\mathbf{j}\operatorname{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\operatorname{div}'\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{\operatorname{div}'\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

où le signe du gradient et de la divergence indique la dérivation par rapport aux coordonnées avec prime. En utilisant le théorème d'Ostrogradsky-Gauss (A1.15), transformons l'une des intégrales de volume en intégrale de surface

$$\int\limits_{V\to\infty}\operatorname{div}'\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'=\oint\limits_{S\to\infty}\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS',$$

qui est nulle, comme il est facile de le voir.

Par une vérification directe, compte tenu de l'équation de continuité (III.6), on se rend compte sans peine de l'égalité

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\operatorname{div}'\mathbf{j}=\frac{\partial j_x}{\partial x'}+\frac{\partial j_y}{\partial y'}+\frac{\partial j_z}{\partial z'}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

où la densité volumique de courant dépend du temps, compte tenu du retard

$$\mathbf{j}=\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right).$$

Après cela, la divergence du potentiel vecteur retardé s'écrira sous la forme

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{1}{c}\int\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'.$$

Le second membre, changé de signe, de l'égalité obtenue est égal à $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Cela signifie que les potentiels électromagnétiques retardés satisfont à la condition de Lorentz.

244. $\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \nabla^2\varphi=-4\pi\rho.$

§ 2. Densité de charge. Densité de courant

245. $\rho=e\delta\left(x-l-\frac{vt}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(y-\frac{vt}{\sqrt{2}}\right)\delta(z),\quad \mathbf{j}=\rho\mathbf{v}.$

246. $\rho=e\delta(x-a\sin\omega t)\,\delta(y)\,\delta(z),\quad j_x=\rho a\omega\cos\omega t,\quad j_y=j_z=0;$

$$\bar{\rho}=\frac{e}{\pi}\frac{\delta(y)\,\delta(z)}{\sqrt{a^2-x^2}}\text{ pour }|x|<a,\ \bar{\rho}=0\text{ pour }|x|>a;\ \bar{\mathbf{j}}=0.$$

247. $\rho=\frac{e}{R}\delta(r-R)\,\delta(\psi-\omega t+2\pi n)\,\delta(z),\quad j_r=j_z=0,\quad j_\psi=\rho R\omega.$

Ici le nombre entier positif n est choisi pour chaque instant de temps à partir de la condition $2\pi n\leqslant\omega t\leqslant 2(n+1)\pi$.

248. $\rho=\frac{q}{R\sin\theta}\delta(r-R)\,[\delta(\psi-\omega t+2n\pi)+\delta(\psi-\omega t+2n\pi+\pi)],$

$j_z=j_\theta=0$, $j_\psi=\rho\omega R\sin\theta$ où le nombre entier positif n est choisi pour chaque instant fixe t à partir de la condition $2n\pi\leqslant\omega t\leqslant 2(n+1)\pi$.

249. $\rho=\frac{3Q}{4\pi R^3}\eta(R-r)$, $\mathbf{j}=\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Ici, $\eta(\alpha)$ est une fonction unité de Heaviside de l'argument α, définie par (A3.21).

250. $\mathbf{E}=\frac{e(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|^3}$, $\mathbf{H}=\frac{e\mathbf{v}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e)}{c\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e|^3}$, où $r_e=r_e(t)$ est le rayon vecteur de la charge en mouvement e.

§ 3. Moment magnétique, moment électrique dipolaire et moment électrique quadrupolaire des charges en mouvement

251. $\mu = \frac{QR^2}{5c}\omega; \quad \beta = \frac{Q}{2mc}$.

252. $\mu = \frac{m_1 m_2}{2c(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1^2}+\frac{e_2}{m_2^2}\right)\mathbf{M}$.

253. L'impulsion totale des particules dans le système de coordonnées considéré doit être nulle $\mathbf{P} = 0$.

254. L'élément de surface $dS = r\,dr\,d\theta$ du disque, situé au point de coordonnées sphériques r et θ, produit lors de sa rotation un courant circulaire

$$dJ = \frac{\sigma\omega}{2\pi}dS.$$

Le moment magnétique de ce courant est de la forme

$$d\mu = \frac{\sigma\omega}{2c}r^2\sin^2\theta\,dS.$$

Après l'intégration, on obtient

$$\mu = \frac{QR^2}{8c}\omega.$$

255. $\mu = \frac{5qa^3}{6c}\omega$.

256. $\mathbf{I}_n(\mathbf{r}, t) = \mu_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))$.

257. La trajectoire de la particule en coordonnées polaires est de la forme

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\psi,$$

où le paramètre focal p et l'excentricité ε sont donnés par les formules

$$p = \frac{M^2}{m\,|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{m\alpha^2}}$$

La moyenne temporelle sur une période T du moment électrique dipolaire de la charge en mouvement est dirigée le long de l'axe polaire. Sa projection sur cet axe est

$$d_x = \frac{e}{T}\int_0^T r\cos\psi\,dt = \frac{emp^3}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi\,d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^3}. \qquad (1)$$

Lors du changement de variable d'intégration on a utilisé l'équation de la trajectoire et l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui établit la liaison entre l'accroissement de temps et

celui d'angle polaire

$$dt = \frac{m}{M} r^2 \, d\psi.$$

Puis, utilisons une intégrale donnée dans la table de fonctions

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\beta + \varepsilon \cos \psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon^2}}.$$

En dérivant les deux membres de la dernière égalité par rapport à β et ε et en introduisant ensuite $\beta = 1$, on trouve la valeur de l'intégrale dans l'expression (1). Il vient

$$d_x = -\frac{3}{2} \varepsilon e a, \tag{2}$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2\mathscr{E}}.$$

Pour déterminer le vecteur constant $\mathbf{I}$, calculons sa grandeur en un point fixe de la trajectoire de coordonnées $\psi = 0$ et $r = a(1 - \varepsilon)$. En ce point, on a

$$\mathbf{I} = (vM + \alpha)\, \mathbf{l}_x = -2\mathscr{E} \varepsilon a \mathbf{l}_x. \tag{3}$$

Ainsi, le vecteur $\mathbf{I}$ qui conserve sa valeur est dirigé le long de l'axe polaire X sur lequel est situé le demi-grand axe de la trajectoire elliptique suivie par la particule.

En comparant l'expression (3) et l'expression (2), on trouve finalement

$$\mathbf{d} = \frac{3e}{4\mathscr{E}} \mathbf{I}.$$

258. $\rho(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{d}\nabla)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d),$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{d}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) - \dot{\mathbf{r}}_d (\mathbf{d}\nabla)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d),$$

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c} [(\mathbf{r}_d \times \dot{\mathbf{d}}) + (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{r}}_d)].$$

I n d i c a t i o n. Un dipôle ponctuel doit être considéré comme le cas limite du système de deux charges e et $-e$ dont la distance l tend vers zéro, alors que les valeurs absolues des charges tendent vers l'infini (voir par exemple la résolution du problème 89). Les grandeurs cherchées sont calculées à l'aide des formules (III.5) et (III.9) dans lesquelles il faut passer à une double limite $l \to 0$ et $e \to \infty$ compte tenu de la relation

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d},$$

où le vecteur $\mathbf{l}$ est dirigé vers la charge positive.

259. $D_{11} = -D_{22} = -3Rd \sin 2\omega t$, $D_{12} = 3Rd \cos 2\omega t$, $D_{13} = D_{23} = D_{33} = 0$.

260. $D_{\alpha\beta}=0$ pour $\alpha\neq\beta$, $D_{11}=\frac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(1+9\varepsilon^2)$, $D_{22}=\frac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(1-6\varepsilon^2)$, $D_{33}=-\frac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(2+3\varepsilon^2)$, où ε est l'excentricité de la trajectoire elliptique :

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{m\alpha^2}}.$$

261. $E_\alpha=\frac{3(\mathbf{dr})x_\alpha-r^3d_\alpha}{r^5}+\left(\frac{5}{2}x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{D_{\beta\gamma}x_\gamma}{r^7}$, où on a introduit la désignation $d_1=-\frac{3}{2}e\varepsilon a$, $d_2=d_3=0$, $D_{\alpha\beta}=0$ pour $\alpha\neq\beta$, $D_{11}=\frac{ea^2}{2}(1+9\varepsilon^2)$, $D_{22}=\frac{ea^2}{2}(1-6\varepsilon^2)$, $D_{33}=-\frac{ea^2}{2}(2+3\varepsilon^2)$, $a=\frac{e^2}{2|\mathscr{E}|}$, $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{me^4}}$.

Pour la trajectoire circulaire

$$E_x=\frac{Dx}{r^7}(r^2-5z^2),\quad E_y=\frac{Dy}{r^7}(r^2-5z^2),\quad E_z=\frac{Dz}{r^7}(3r^2-5z^2),$$

où $D=3/4ea^2$.

I n d i c a t i o n. Utiliser les résultats des problèmes 257 et 260.

§ 4. Ondes électromagnétiques

262. $\mathbf{s}=\frac{l^2}{4\pi\omega}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\mathbf{k}$, $\quad \omega=\frac{l^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2$.

263. $\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi}RA_0^2hk\mathbf{k}$.

264. $\mathbf{F}=\frac{1}{8}R^2A_0^2k\mathbf{k}$.

265. Choisissons le sens du vecteur $\mathbf{k}$ comme l'axe des Z et dirigeons les deux autres axes des X et Y le long des vecteurs polarisation $\mathbf{l}^{(1)}$ et $\mathbf{l}^{(2)}$ de l'onde polarisée rectilignement. Alors,

$$\sum_{\lambda=1}^{2}(\mathbf{A}\mathbf{l}^{(\lambda)})(\mathbf{B}\mathbf{l}^{(\lambda)})=A_xB_x+A_yB_y.$$

Ajoutons au second membre de cette égalité et en soustrayons l'expression A_zB_z. Les trois premiers termes de la somme obtenue représentent le produit scalaire $\mathbf{AB}$. Mettons le dernier terme sous la forme

$$-A_zB_z=-\frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})(\mathbf{Bk}).$$

Ainsi, nous avons représentée la somme donnée par des termes qui ne contiennent que des produits scalaires des vecteurs. Cela signifie qu'elle a la même forme dans tous les systèmes de coordonnées tournés d'un certain angle l'un par rapport à l'autre.

Pour l'onde polarisée circulairement, dans le système de coordonnées indiqué plus haut, on a $\mathbf{b}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_x + i\mathbf{l}_y)$ et $\mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_x - i\mathbf{l}_y)$. Pour le reste, on développe des raisonnements analogues.

266. Ecrivons les intensités des champs électriques en notation complexe. Alors, on obtient pour l'onde résultante

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{[\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02} e^{i\chi}]\, e^{i(\mathbf{kr} - \omega t - \alpha_1)}\},$$

où $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$. Notons

$$\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02} e^{i\chi} = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)\, e^{-i\alpha},$$

où $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ sont des vecteurs réels:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos\alpha + \mathbf{E}_{02} \cos(\alpha + \chi),$$
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{E}_{01} \sin\alpha + \mathbf{E}_{02} \sin(\alpha + \chi).$$

Choisissons la phase α de façon que l'égalité

$$\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0 \text{ ou } \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{tg}\chi$$

soit satisfaite. A cet effet, il faut que

$$\alpha = -\frac{\chi}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Après cela, les vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ s'écriront

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \cos\frac{\chi}{2},$$

$$\mathbf{b}_2 = (-\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \sin\frac{\chi}{2}.$$

On voit que l'onde résultante est polarisée elliptiquement. Les axes principaux de l'ellipse de polarisation sont tournés par rapport aux vecteurs $\mathbf{E}_{01}$ et $\mathbf{E}_{02}$ de l'angle $\pi/4$ dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on regarde dans le sens de propagation de l'onde.

Si les vecteurs $\mathbf{E}_{01}$, $\mathbf{E}_{02}$ et $\mathbf{k}$ forment un trièdre direct et

$$\sin\frac{\chi}{2} > 0, \quad \cos\frac{\chi}{2} > 0,$$

l'onde résultante aura une polarisation droite. Dans le cas général, le sens de rotation du vecteur $\mathbf{E}$ de l'onde résultante dépend de l'orien-

tation des vecteurs $\mathbf{E}_{01}$ et $\mathbf{E}_{02}$ ainsi que des signes des quantités

$$\cos\frac{\chi}{2}, \quad \sin\frac{\chi}{2}.$$

Dans un système de coordonnées dont les axes des X et Y sont parallèles aux vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{k}$ respectivement, les projections de l'intensité du champ électrique de l'onde résultante s'écriront

$$E_x = b_1 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$
$$E_y = b_2 \sin\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$

où $b_1 = \sqrt{2}\, E_{01} \cos\frac{\chi}{2}$, $b_2 = \sqrt{2}\, E_{02} \sin\frac{\chi}{2}$.

267. L'intensité du champ électrique de l'onde résultante est

$$\mathbf{E} = 2E_0\left(\mathbf{1}_x \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} + \mathbf{1}_y \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$

où E_0 et ω sont l'amplitude et la fréquence des deux ondes polarisées circulairement et α_1 et α_2 la phase constante des ondes à polarisation droite et gauche respectivement ($\omega = kc$). La quantité E_0 est numériquement égale au module du vecteur intensité de champ électrique de chaque onde polarisée circulairement.

268. L'onde résultante est polarisée elliptiquement. Les demi-axes de l'ellipse de polarisation sont égaux à $A + B$ et $|A - B|$. La polarisation de l'onde est droite pour $A > B$ et gauche si $A < B$.

269. L'onde résultante est polarisée elliptiquement. Les demi-axes b_1 et b_2 de l'ellipse de polarisation sont

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}|, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\mathbf{E}_{02} - \mathbf{E}_{01}|.$$

La polarisation de l'onde est droite si le vecteur $\mathbf{E}_{01} \times \mathbf{E}_{02}$ est parallèle au vecteur $\mathbf{k}$ et gauche si ces vecteurs sont antiparallèles.

270. Choisissons l'axe des X le long du vecteur $\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}$ et l'axe des Z dans le sens de propagation de l'onde. Alors, les projections du vecteur intensité de champ électrique de l'onde résultante prennent la forme

$$E_x = \sqrt{2}\, E_{01} \cos\chi \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\, t - \frac{k_1+k_2}{2}\, z\right),$$
$$E_y = \sqrt{2}\, E_{01} \sin\chi \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\, t - \frac{k_1+k_2}{2}\, z\right)$$

où l'on a introduit la notation $\chi = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\, t - \frac{k_1-k_2}{2}\, z$. En tout point de l'espace, l'ellipse de polarisation de l'onde résultante se transforme, au cours du temps, du tronçon dirigé le long de l'axe des X (pour $\chi = 0$) en ellipse avec rotation droite du vecteur $\mathbf{E}$

et puis en circonférence (pour $\chi = \pi/4$). Ensuite, la circonférence se transforme en ellipse à rotation droite qui s'aplatit progressivement en un tronçon (pour $\chi = \pi/2$) dirigé le long de l'axe des Y. Au cours de l'augmentation ultérieure de χ dans les limites de $\pi/2$ à π, la situation se répète mais avec une rotation gauche du vecteur $\mathbf{E}$ et ainsi de suite. Lorsque l'ellipse dégénère en un tronçon, l'onde devient polarisée rectilignement.

271. $\mathbf{E} = 2E_0 (\mathbf{l}_x \cos\chi + \mathbf{l}_y \sin\chi) \cos\Phi$,

$$\chi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \qquad \Phi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

où α_1 et α_2 sont des phases constantes des ondes à polarisation circulaire droite et gauche qui se propagent le long de l'axe des Z. E_0 est l'amplitude de ces ondes, numériquement égale au module du vecteur intensité de champ électrique. L'onde résultante est polarisée rectilignement. Pourtant, en tout point de l'espace, son vecteur polarisation tourne lentement avec une fréquence $|\omega_1 - \omega_2|$ autour de la direction de propagation.

272. $\mathbf{E} = \mathbf{l}E_0 \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4}\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)^2\right]$.

273. $$\mathbf{E} = \mathbf{l}E_0 \frac{\sin\left[\Delta\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)\right]}{\omega_0\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)} \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right) + \alpha\right].$$

274. $$\mathbf{E} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathbf{E}'(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c}\right) + \mathbf{E}''(\omega)\sin\left(\omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c}\right)\right] d\omega,$$

où $\mathbf{E}'(\omega)$ et $\mathbf{E}''(\omega)$ sont les parties réelle et imaginaire de la composante de Fourier de l'intensité de champ électrique donnée:

$$\mathbf{E}'(\omega) + i\mathbf{E}''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t') e^{i\omega t'} dt'.$$

275. $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2(2\pi)^3 \tau \mathbf{E}_0}{\omega^2\tau^2 + 1}\,\delta\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}\omega}{c}\right)$.

276. $\mathbf{E} = \sqrt{\pi}\,\mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{4}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)^2}$.

277. $\mathbf{E_k} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2 + \varkappa^2}$.

I n d i c a t i o n. Développer les deux membres de l'égalité $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ en intégrale d'espace de Fourier et obtenir la relation entre les composantes de Fourier des deux membres de cette égalité $\mathbf{E_k} = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}$. La composante de Fourier $\varphi_\mathbf{k}$ du potentiel

s'obtient par un calcul direct de l'intégrale

$$\varphi_{\mathbf{k}} = e\int \frac{e^{-\varkappa r}}{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = \frac{4\pi e}{k^2+\varkappa^2}.$$

278. $E_r = E_\psi = 0, \quad E_\theta = \dfrac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \sin\theta};$

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \sin\theta}$$

279. Pour $r < R$:

$$E_z = E_\psi = 0, \quad E_r = \frac{2J_0}{cr}\cos(\omega t - kz),$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J_0}{cr}\cos(\omega t - kz);$$

pour $r > R$:

$$E_z = E_\psi = 0, \quad E_r = \frac{4J_0}{cr}\cos kz \cos \omega t,$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{4J_0}{cr}\sin kz \sin \omega t.$$

§ 5. Diffraction

280. Choisissons les axes des X et Y dans le plan de l'écran en confondant l'axe des Y avec la ligne axiale de la fente comme il

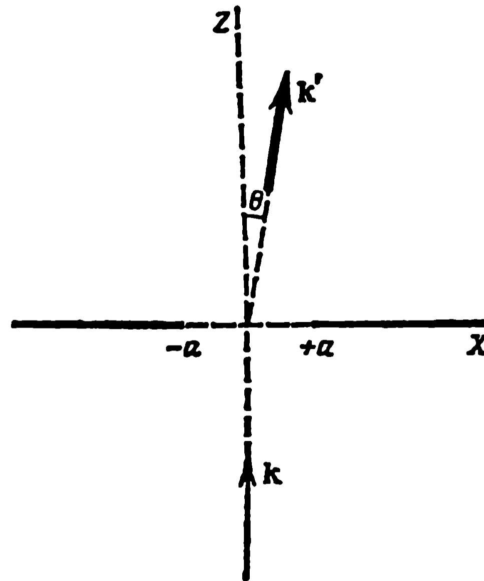


Fig. 9

est indiqué sur la fig. 9. La droite en trait fort représente cet écran en coupe. Le champ diffracté $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, z, t)$ derrière l'écran est uniforme le long de l'axe des Y. Il satisfait à l'équation de l'onde

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

et à la condition à la limite dans le plan XY:

$$\mathbf{E}(x, 0, t) = \mathbf{l}_y E_0 g(x) \cos \omega t,$$

où $g(x) = 1$ pour $|x| \leqslant a$ et $g(x) = 0$ pour $|x| > a$. Cette condition à la limite est une condition approchée. Elle n'est applicable que pour un faible écart à l'optique géométrique $ka \gg 1$.

Il est avantageux de résoudre d'abord un problème auxiliaire plus simple

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mathscr{E}(x, 0, t) = \mathbf{l}_y E_0 g(x) e^{-i\omega t}.$$

Alors, la solution du problème principal s'écrira sous la forme $\mathbf{E}(x, z, t) = \mathrm{Re}\,\mathscr{E}(x, z, t)$.

Il est clair que la solution du problème auxiliaire devra être cherchée sous la forme

$$\mathscr{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y E_0 f(x, z) e^{-i\omega t}.$$

La fonction $f(x, z)$ est définie comme solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0 \quad (1)$$

avec la condition à la limite

$$f(x, 0) = g(x). \quad (2)$$

Développons la fonction cherchée $f(x, z)$ en intégrale de Fourier suivant la variable x

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q, z) e^{iqx} dq.$$

De l'équation principale (1) on obtient une équation différentielle simple pour la composante de Fourier $\psi(q, z)$ à valeur fixe du paramètre q:

$$\frac{d^2\psi(q, z)}{dz^2} + (k^2 - q^2)\psi(q, z) = 0.$$

Sa solution est

$$\psi(q, z) = F(q) e^{i\sqrt{k^2-q^2}\,z} + \Phi(q) e^{-i\sqrt{k^2-q^2}\,z}.$$

Ainsi, la fonction cherchée $f(x, z)$ se décompose en deux termes

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{i(qx + \sqrt{k^2-q^2}\,z)} dq + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q) e^{i(qx - \sqrt{k^2-q^2}\,z)} dq. \quad (3)$$

Si l'on prend en considération le facteur temporel $e^{-i\omega t}$, il devient clair que le premier terme de la somme (3) décrit les ondes qui se propagent depuis la fente, et le deuxième terme, les ondes se propageant en sens inverse. D'après les hypothèses du problème, le deuxième terme doit être nul: $\Phi(q) \equiv 0$.

De la condition à la limite (2) on déduit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{iqx} dq = g(x),$$

c'est-à-dire que la quantité $F(q)$ est la composante de Fourier de la fonction $g(x)$. Finalement

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y E_0 \operatorname{Re}(f(x, z)\, e^{-i\omega t}) =$$

$$= \mathbf{l}_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{i\left(qx+\sqrt{k^2-q^2}z-\omega t\right)} dq.$$

Les raisonnements que nous venons de développer sont également valables pour un ensemble de fentes indéfinies parallèles à l'axe des Y. Pour une fente unique on obtient

$$F(q) = \int_{-a}^{a} e^{-iqx}\, dx = 2\frac{\sin qa}{q},$$

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi}\int_{-k}^{k} \frac{\sin qa}{q} \cos\left(\omega t - qx - \sqrt{k^2-q^2}z\right) dq +$$

$$+ \mathbf{l}_y \frac{2E_0}{\pi}\int_{k}^{\infty} \frac{\sin qa}{q}\, e^{-\sqrt{q^2-k^2}z} \cos qx\, dq \cos \omega t.$$

Le premier terme de l'intensité $\mathbf{E}(x, z, t)$ du champ électrique exprime une onde progressive qui se propage depuis l'écran. Le deuxième terme représente une onde stationnaire dont l'amplitude ne diffère notablement de zéro qu'au voisinage de l'écran. D'après l'ordre de grandeur, le deuxième terme est plus petit que le premier dans le rapport de $\frac{1}{ka} \ll 1$. Il doit être rejeté pour ne pas dépasser la précision adoptée pour le calcul. Ainsi, l'onde diffractée est de la forme

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi}\int_{-k}^{k} \frac{\sin qa}{q} \cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})\, dq,$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k}' = \mathbf{1}_x q + \mathbf{1}_z \sqrt{k^2 - q^2}$ fait un petit angle θ avec la direction de propagation de l'onde incidente. Sa composante

située dans le plan transversal XY est liée à l'angle de diffraction θ par la relation

$$q = k \sin\theta \approx k\theta.$$

Considérons une bande indéfinie de largeur unité ($-\infty \leqslant x \leqslant \leqslant \infty$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + 1$, y_0 étant arbitraire) située à une certaine distance z de l'écran. La moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$ du flux de l'énergie électromagnétique à travers la surface de cette bande a pour expression

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathbf{E}^2(x, z, t)}\, dx = \frac{cE_0^2}{4\pi^2} \int_{-k}^{k} \frac{\sin^2 qa}{q^2}\, dq, \tag{4}$$

où le trait surlignant le carré de l'intensité du champ électrique de l'onde diffractée indique une moyenne temporelle sur une période d'oscillation.

La valeur de I est indépendante de z. Cela signifie qu'elle se confond avec la moyenne temporelle de l'intensité $I_0 = cE_0^2 a/4\pi$ de l'onde incidente, rapportée à l'unité de longueur de la fente si l'on néglige les petits termes d'ordre $1/ka$.

La région efficace d'angles de diffraction est comprise dans les limites $-\theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_m$ où $\theta_m \gg 1$. Admettons que la longueur de l'onde incidente est si petite que $ka\theta_m \gg 1$. Par conséquent, l'intensité (4) de l'onde diffractée par unité de longueur s'écrira

$$I = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin^2 ka\theta}{ka\theta^2}\, d\theta.$$

On en déduit la répartition angulaire de l'intensité de l'onde diffractée

$$dI = I_0 \frac{\sin^2 ka\theta}{\pi ka\theta^2}\, d\theta.$$

Ce résultat peut être également obtenu directement à partir des formules (III.25) à (III.27).

281. En reprenant les raisonnements développés lors de la résolution du problème précédent, on obtient:

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{i(qx + \sqrt{k^2 - q^2}\, z - \omega t)}\, dq,$$

$$F(q) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2nb-a}^{2nb+a} e^{-iqx}\, dx = \frac{1}{iq} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-iq(2nb-a)} - e^{-iq(2nb+a)}\right) =$$

$$= 2\frac{\sin qa}{q} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2nqb} = 2\frac{\sin qa}{q} \frac{1 - e^{-i2Nqb}}{1 - e^{-i2qb}} =$$

$$= 2\frac{\sin qa}{q} \frac{\sin Nqb}{\sin qb} e^{-i(N-1)qb}.$$

Si l'on néglige les petits termes d'ordre $\frac{1}{ka} \leqslant 1$, l'intensité du champ électrique de l'onde diffractée se propageant sous de petits angles de diffraction prendra la forme

$$\mathbf{E}(x, z, t) =$$
$$= \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^{k} \frac{\sin qa}{q} \frac{\sin Nqb}{\sin qb} \cos [\omega t - qx - \sqrt{k^2 - q^2} z + (N-1) qb]\, dq.$$

On en trouve la moyenne temporelle sur une période d'oscillation de l'intensité de l'onde diffractée par unité de longueur dans l'intervalle d'angle $d\theta$:

$$dI = \frac{I_0}{\pi N} \left(\frac{\sin Nkb\theta}{\sin kb\theta} \right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{ka\theta^2} d\theta,$$

où I_0 est la moyenne temporelle de l'intensité totale, par unité de longueur, de l'onde électromagnétique passant par toutes les fentes.

282. $dI = \frac{I_0}{\pi^2 ab} \frac{\sin^2 (ka\theta \cos \psi) \sin^2 (kb\theta \sin \psi)}{k^2\theta^4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi} d\Omega,$

où I_0 est la moyenne temporelle de l'intensité totale de l'onde électromagnétique passant par l'orifice rectangulaire et θ et ψ sont les angles polaire et azimutal du point d'observation.

I n d i c a t i o n. Utiliser les formules (III.25) à (III.27).

283. Dans l'intégrale (III.25), effectuons un changement de variables d'intégration : $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$ où r et φ sont des coordonnées polaires dans le plan de l'écran, l'origine des coordonnées étant choisie au centre de l'orifice. L'angle φ est compté à partir du vecteur $\mathbf{q}$. Puis, utilisons la représentation intégrale (A6.7) de la fonction de Bessel d'ordre zéro. Alors, il vient

$$u_{\mathbf{q}} = u_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} r\, dr\, d\varphi = 2\pi u_0 \int_0^R J_0(qr)\, r\, dr.$$

D'après la relation (A6.15) on a

$$u_{\mathbf{q}} = 2\pi u_0 R \frac{J_1(qR)}{q}.$$

Introduisons la composante de Fourier trouvée dans la formule générale (III.27) et utilisons (III.26). Dès lors, la répartition angulaire de l'intensité de l'onde électromagnétique par suite de la diffraction sur l'orifice circulaire prendra la forme

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(kR\theta)}{\pi\theta^2} d\Omega,$$

où I_0 est la moyenne temporelle de l'intensité totale de l'onde électromagnétique passant par l'orifice.

284. $dI = I_0 \dfrac{[R_2 J_1(kR_2\theta) - R_1 J_1(kR_1\theta)]^2}{\pi (R_2^2 - R_1^2)\,\theta^2}\, d\Omega,$

où I_0 est la moyenne temporelle de l'intensité totale de l'onde électromagnétique passant par l'orifice annulaire.

285. La composante de Fourier de l'onde diffractée s'exprime sous la forme de l'intégrale double (III.25) étendue à la surface de l'ellipse de demi-axes a et b. Le changement de variables d'intégration $x = ar \cos \varphi$ et $y = br \sin \varphi$ conduit à l'intégration sur la surface du cercle de rayon unité. L'angle φ est compté à partir du vecteur $\mathbf{Q} = \mathbf{1}_x a q_x + \mathbf{1}_y b q_y$. Compte tenu de la représentation intégrale de la fonction de Bessel (A6.7), on obtient

$$u_{\mathbf{q}} = abu_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-iQr\cos\varphi}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi abu_0 \int_0^1 J_0(Qr)\, r\, dr.$$

En utilisant la formule (A6.15), mettons l'expression obtenue sous la forme

$$u_{\mathbf{q}} = 2\pi abu_0 \frac{J_1(Q)}{Q}.$$

Puis, servons-nous des formules générales (III.26) et (III.27) qui conduisent au résultat cherché

$$dI = I_0 \frac{abJ_1^2\left(k\theta\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}\right)}{\pi\theta^2 (a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)}\, d\Omega.$$

Dans cette formule, I_0 est la moyenne temporelle de l'intensité totale de l'onde électromagnétique passant par l'orifice elliptique et θ et ψ sont les angles polaire et azimutal du point d'observation.

286. $dI = I_0 \dfrac{\sin^2 ka\,\theta}{\pi\, ka\, \theta^2}\, d\theta$, où I_0 est la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité de l'onde électromagnétique tombant sur l'unité de longueur de la plaque.

287. $dI = I_0 \dfrac{J_1^2(kR\theta)}{\pi\theta^2}\, d\Omega$, où I_0 est la moyenne temporelle, sur une période $T = 2\pi/\omega$, de l'intensité totale de l'onde électromagnétique absorbée par la sphère représentant un corps noir.

CHAPITRE IV

RAYONNEMENT DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR LES CHARGES EN MOUVEMENT LENT

§ 1. Rayonnement dipolaire électrique

288. Plaçons l'origine des coordonnées au point d'entrée de la particule dans le condensateur et dirigeons l'axe des X dans le sens de mouvement, perpendiculairement aux armatures du condensateur. De l'équation de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$ déterminons l'accélération de la particule qui intervient dans la formule donnant l'intensité de rayonnement dipolaire électrique. Après cela, on obtient

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}.$$

Cherchons le temps t_{m} de mouvement en égalant la coordonnée x de la particule

$$x = \frac{eEt_{\text{m}}^2}{2m} + v_0 t_{\text{m}} \cos\alpha$$

à la distance l entre les armatures du condensateur. L'énergie émise pendant le temps de passage de la particule à travers le condensateur s'écrira

$$\mathscr{E} = \frac{2e^3Ev_0}{3mc^3}\left(\sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2} + \cos^2\alpha} - \cos\alpha\right).$$

289. Supposons que l'origine des coordonnées soit choisie au centre de la sphère et le mouvement s'effectue le long de l'axe des X. En partant de l'équation du mouvement $m\ddot{x} = \frac{Qe}{R^3}x$, déterminons l'accélération et écrivons l'intensité de rayonnement comme fonction de la coordonnée de la particule

$$I = \frac{2Q^2e^4x^2}{3m^2c^3R^6}.$$

On utilise ici le fait que l'influence du champ de rayonnement sur le mouvement de la particule est négligeable. Pour calculer l'énergie

$$\mathscr{E} = \int_{-R}^{R} I\frac{dx}{\dot{x}}$$

perdue par la particule pour le rayonnement dipolaire électrique au cours de la traversée de la sphère, utilisons le principe de la conservation de l'énergie

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathscr{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3}(x^2 - R^2).$$

L'énergie $\mathscr{E}$ de rayonnement est rejetée parce qu'elle est négligeable par rapport à l'énergie totale de la particule. Dans ces conditions, la vitesse $\dot{x}$ est une fonction simple de la coordonnée de la particule et l'intégrale par rapport à la variable x est facile à calculer

$$\mathscr{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2}\sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2R}} \times \left[\left(\frac{2\mathscr{E}_0R}{|Qe|}+1\right)\arcsin\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0R}{|Qe|}+1}} - \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0R}{|Qe|}}\right].$$

290. $\mathscr{E} = \frac{2\pi e^3Hv^2}{3mc^4}$.

291. $\mathscr{E} = \frac{2e^4H^2}{3m^2c^5}\left[v_{0x}^{0\,2} + \left(v_{0y} + \frac{E}{H}c\right)^2\right]t$, où les axes des X et Z sont choisis le long des vecteurs **E** et **H** respectivement.

292. $I = \frac{J_0^2l^2\omega^2}{3c^3}$.

293. Compte tenu de la force de frottement de rayonnement, l'équation du mouvement de l'oscillateur s'écrira

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^2}\dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \sin \omega t. \qquad (1)$$

La force de frottement de rayonnement est petite devant la force élastique de l'oscillateur. C'est pourquoi, dans l'équation homogène, on peut effectuer avec une grande précision le changement $\dddot{\mathbf{r}} \to -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$ qui conduit à l'équation des oscillations avec frottement

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma_0\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

où $\gamma_0 = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$, $\gamma_0 \ll \omega_0$. Par conséquent, la fonction qui exprime la solution générale de l'équation homogène correspondante s'atténue avec le temps. Les oscillations établies de l'oscillateur se décrivent par une solution particulière de l'équation (1) proportionnelle à la force extérieure

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m}\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - \omega\gamma\cos\omega t}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

La moyenne temporelle, sur une période T, de l'intensité de rayonnement de l'oscillateur est

$$I = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

294. Cherchons l'accélération de l'électron en partant de l'équation de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$. Cela permet d'écrire l'énergie totale de rayonnement sous la forme

$$\mathscr{E} = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4}. \quad (1)$$

Supposons, par souci de commodité, que l'électron se déplace dans le plan XY et qu'à l'instant $t = 0$ il traverse l'axe des Y (fig. 10).

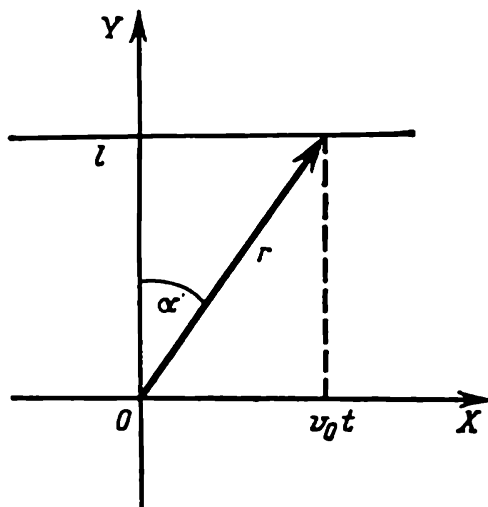


Fig. 10

Puisque la trajectoire est sensiblement rectiligne, la vitesse de l'électron varie peu $v_x = v_0$ pendant le temps de passage près du noyau. C'est pourquoi l'intégrale (1) prend la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(l^2 + v_0^2t^2)^2} = \frac{2}{v_0 l^3} \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2v_0 l^3}.$$

On obtient finalement

$$\mathscr{E} = \frac{\pi Z^2 e^6}{3m^2c^3 v_0 l^3}.$$

295. a) $\mathscr{E} = \frac{3\pi e^4 d^2}{8m^2c^3 v_0 l^5}$; b) $\mathscr{E} = \frac{7\pi e^4 d^2}{8m^2c^3 v_0 l^5}$.

296. L'équation du mouvement est de la forme $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{3D e \mathbf{r}}{4r^5}$, $\mathbf{r}$ étant le rayon vecteur de l'électron dans le plan XY. De cette équation nous pouvons déterminer l'accélération qui intervient dans la formule de l'intensité de rayonnement. Alors, l'intensité de rayonnement dipolaire électrique due à l'interaction de l'électron et du moment électrique quadrupolaire de l'atome s'écrira

$$I = \frac{3D^2 e^4}{8m^2 c^3 r^8}.$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ l'électron traverse l'axe des Y (v. fig. 10). La trajectoire de son mouvement est sensiblement rectiligne. Cela signifie que l'énergie cinétique de l'électron est grande par rapport à son énergie potentielle. Puisque l'électron est animé d'un mouvement rapide et passe loin du centre de forces, sa vitesse varie peu en module $v_x = v_0$ et $x = v_0 t$. Cette circonstance facilite le calcul de l'énergie totale perdue par l'électron pour le rayonnement dipolaire électrique

$$\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I \frac{dx}{v_0} = \frac{3D^2 e^4}{4m^2 c^3 v_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + l^2)^4} = \frac{15\pi D^2 e^4}{128 m^2 c^3 v_0 l^7}.$$

297. Dans le système du centre d'inertie, le moment électrique dipolaire resultant des deux fragments est

$$d_x = \frac{eA_1 A_2}{A_1 + A_2}\left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2}\right) x \equiv Q_{\text{eff}} x, \quad d_y = d_z = 0.$$

La quantité Q_{eff} peut être considérée comme charge effective d'une particule de masse réduite

$$\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m.$$

Le mouvement de la particule de masse réduite s'effectue le long de l'axe des X et se décrit par l'équation

$$\mu \ddot{x} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x^2}$$

avec les conditions supplémentaires $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, où x_0 est la distance initiale entre les fragments.

L'énergie totale de rayonnement dipolaire électrique est

$$\mathscr{E} = \frac{2Q_{\text{eff}}^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{3\mu^2 c^3} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4 \dot{x}}.$$

De la loi de la conservation de l'énergie

$$\frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} = \mathscr{E}_0$$

on peut déterminer la vitesse $\dot{x}$ comme fonction de la coordonnée x, ce qui permet de mettre la dernière intégrale sous la forme

$$\mathscr{E}=\frac{2Q_{\text{eff}}^2\mathscr{E}_0^3}{3\mu^2c^3Z_1Z_2e^4}\left(\frac{\mu}{2\mathscr{E}_0}\right)^{1/2}\int_0^1\frac{\xi^2\,d\xi}{(1-\xi)^{1/2}}.$$

Finalement, l'énergie de rayonnement dipolaire électrique s'écrira

$$\mathscr{E}=\frac{16}{45}\left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2\left(\frac{2A_1A_2}{A_1+A_2}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^{3/2}\frac{\mathscr{E}_0}{Z_1Z_2}.$$

298. L'intensité I de rayonnement du proton est proportionnelle à son énergie cinétique

$$I=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2\frac{4e^4H^2\mathscr{E}}{3m^3c^5}.$$

Cela perment d'établir pour la grandeur cherchée une équation différentielle

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{4e^4H^2}{3m^3c^5}\mathscr{E}.$$

La solution de cette équation fournit la réponse au problème posé

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\exp\left(-\frac{4e^4H^2t}{3m^3c^5}\right).$$

299. $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\exp\left(-\frac{2e^2\omega^2t}{3mc^3}\right).$

300. L'écart au mouvement circulaire, dû à la perte d'énergie de l'électron pour le rayonnement, est très faible pendant une révolution autour du noyau. Aussi, à chaque instant de temps, les énergies cinétique et potentielle de l'électron s'expriment-elles par son énergie totale $\mathscr{E}$. Cette circonstante permet d'exprimer l'intensité de rayonnement dipolaire électrique par l'énergie totale de l'électron

$$I=\frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3}=\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{mr^2}\right)^2=\frac{32\mathscr{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

L'énergie de l'électron est dépensée pour le rayonnement

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{32\mathscr{E}^4}{3c^3(mZe)^2}$$

d'où l'on déduit la loi de décroissance de l'énergie totale de l'électron

$$\frac{1}{\mathscr{E}^3}=\frac{1}{\mathscr{E}_0^3}+\frac{32t}{(mZe)^2c^3},$$

où $\mathscr{E}_0=-Ze^2/2R$ est la valeur initiale de l'énergie totale de l'électron. On obtient le temps de chute de l'électron sur le centre de forces

en faisant tendre l'énergie vers l'infini avec le signe moins

$$t_{ch} = \frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4}.$$

301. Un électron placé à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée représente un oscillateur dont la fréquence est $\omega = \frac{|e|}{R\sqrt{mR}}$. Les ondes électromagnétiques émises ont la même fréquence. Si l'on tient compte de la force $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}$ de frottement de rayonnement, le mouvement oscillant de l'électron deviendra lentement amorti. Dans ce cas, on constate que la relation $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\dot{\mathbf{r}}$ est satisfaite avec une haute précision. D'après les conditions initiales, le mouvement de l'électron est uniforme et se décrit par l'équation

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

dont la solution a la forme

$$x = Re^{-\gamma t/2}\cos\omega t.$$

Ici $\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$ $(\gamma \ll \omega)$. L'énergie totale de l'électron, prise en valeur moyenne entre les instants t et $t+2\pi/\omega$, a pour expression

$$\mathscr{E} = \frac{m}{2}\overline{\dot{x}^2} + \frac{m\omega^2}{2}\overline{x^2} = \frac{1}{2}m\omega^2R^2e^{-\gamma t}.$$

302. La dérivée seconde par rapport au temps du moment électrique dipolaire du système s'exprime par la somme de toutes les forces subies par les particules. Dans le cas d'un système fermé, la résultante de ces forces s'annule. Aussi, l'intensité de rayonnement dipolaire électrique est-elle nulle.

303. En calculant les pertes d'énergie par unité de volume du gaz électronique, on peut sommer non pas les amplitudes du champ mais les intensités de rayonnement des électrons composants. Cela tient à ce que la distance moyenne entre les électrons est de l'ordre de grandeur du rayon de la zone d'onde alors que les déphasages des ondes émises par les électrons sont répartis de façon désordonnée. L'intensité de rayonnement d'un électron unique situé dans un champ magnétique uniforme extérieur d'intensité **H** est donnée par la formule

$$I(v_\perp) = \frac{2e^4H^2v_\perp^2}{3m^2c^5}, \qquad (1)$$

où $v_\perp$ est la composante de la vitesse de l'électron perpendiculaire au vecteur **H**. En utilisant la distribution de Maxwell

$$dN(\mathbf{v}) = N_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z,$$

ainsi que les relations

$$v^2 = v_\perp^2 + v_z^2, \quad dv_x dv_y = v_\perp dv_\perp d\psi,$$

écrivons le nombre d'électrons, par unité de volume, ayant des vitesses comprises entre $v_\perp$ et $v_\perp + dv_\perp$ sous la forme

$$dN(v_\perp) = \frac{N_0 m}{kT} e^{-\frac{mv_\perp^2}{2kT}} v_\perp \, dv_\perp,$$

où k est la constante de Boltzmann et T la température du gaz électronique. En multipliant cette grandeur par l'intensité (1) de rayonnement d'un électron unique, on obtient l'énergie de rayonnement, par unité de temps, d'un groupe d'électrons contenus dans l'unité de volume et ayant des vitesses de $v_\perp$ à $v_\perp + dv_\perp$. L'intensité totale I de rayonnement par unité de volume du gaz électronique sera obtenue en intégrant par rapport à la vitesse transversale

$$I = \frac{N_0 e^4 H^2}{3mkTc^5} \int_0^\infty e^{-\frac{m\xi}{2kT}} \xi \, d\xi = \frac{4N_0 e^4 H^2 kT}{3m^3 c^5}.$$

304. $I = \frac{8e^4 E^2 \psi_0^2}{3m^2 c^3} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2eE}{ml}} \, t \right).$

305. Plaçons l'origine des coordonnées au point milieu entre les dipôles et écrivons la distance r des dipôles au point d'observation dans la zone d'onde sous la forme

$$r_1 = r - a \frac{\mathbf{n}\mathbf{d}_0}{2d_0}, \quad r_2 = r + a \frac{\mathbf{n}\mathbf{d}_0}{2d_0},$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ est le vecteur unité dirigé du centre du système vers le point d'observation.

L'intensité du champ magnétique du rayonnement dans la zone d'onde est égale à la somme des contributions de chaque dipôle:

$$\mathbf{H} = \frac{\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{c}{r} \right) + \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] + \right.$$
$$\left. + \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] \right\} =$$
$$= \frac{2\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \cos \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

L'intensité de rayonnement, prise en valeur moyenne sur une période, est

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{c^3} \int_0^1 (1 - x^2) \cos^2 \frac{\omega a x}{2c} dx =$$
$$= 2d_0^2 \omega \lambda^{-3} \left[\frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{a^2} \left(\frac{\lambda}{h} \sin \frac{a}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \right) \right].$$

Dans le cas limite où $a \ll \lambda$ on a $I = \frac{4}{3} d_0^2 \omega \lambda^{-3}$.

306. $I = \frac{N^2 d_0^2 \omega^4}{3c^3} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_0^2}\right)$, $\mathscr{E} = \frac{\sqrt{2\pi}\, N^2 d_0^2 \omega^4 T_0}{3c^3}$.

307. $\mathscr{E} = \frac{2\pi e^2 \omega}{3c^3} (\omega^2 r_0^2 + v_0^2)$, $\omega^2 = \frac{4\pi\rho\,|e|}{3m}$.

308. En nous servant de l'équation de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$, exprimons l'énergie $\mathscr{E}_d$ émise dans l'intervalle d'une période T, par l'intégrale

$$\mathscr{E}_d = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int_0^T \frac{dt}{r^4}.$$

En partant de la loi de la conservation de la quantité du mouvement $mr^2\dot{\psi} = M$, passons à l'intégration par rapport à l'angle polaire ψ, en utilisant à cet effet l'équation de la trajectoire

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \psi,$$

où le paramètre focal p et l'excentricité ε sont connus:

$$p = \frac{M^2}{mZe^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{mZ^2e^4}}.$$

On obtient finalement

$$\mathscr{E}_d = \frac{2\pi Z^4 e^{10} m}{3M^5 c^3} \left(3 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{mZ^2e^4}\right).$$

309. Dans le système du centre d'inertie, en coordonnées relatives, l'équation de Newton et le moment électrique dipolaire du système s'écriront:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1e_2\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{d} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} \equiv Q_{\text{eff}}\,\mathbf{r}.$$

Ici, $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite et Q_{eff} la charge effective. Le moment cinétique total M et l'énergie totale $\mathscr{E}$ du système sont donnés

$$M = \mu l v_0, \quad \mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

L'énergie $\mathscr{E}_d$ perdue pour le rayonnement dipolaire électrique s'exprime sous la forme d'intégrale:

$$\mathscr{E}_d = \frac{2Q_{\text{eff}}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} = \frac{4Q_{\text{eff}}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu M c^3 p^3} \int_0^{\psi_m} (1 - \varepsilon\cos\psi)^2\, d\psi,$$

où p est le paramètre focal, ε l'excentricité de l'hyperbole et ψ_m l'angle d'écart maximal par rapport à l'axe polaire, ayant pour

expressions

$$p=\frac{M^2}{\mu e_1 e_2}, \quad \varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{\mu l v_0^2}{e_1 e_2}\right)^2}, \quad \psi_m=\arccos\frac{1}{\varepsilon}.$$

L'intégration donne

$$\mathscr{E}_d=\frac{4(e_1e_2)^4}{3\mu^2c^3(v_0l)^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\psi_m-\frac{3}{2}\varepsilon\sin\psi_m\right].$$

310. $\mathscr{E}_d=\dfrac{4\pi e^2\alpha^2 m\mathscr{E}^2}{c^3(M^2+2m\alpha)^{5/2}}$.

311. $\varkappa=\dfrac{8\pi e^2}{3m^2v_0c^3}\displaystyle\int_0^\infty dl\int_{r_0}^\infty dr\,\frac{l\left(\frac{dU}{dr}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{l^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_0^2}}}$,

où $r_0=r_0(l)$ est la distance minimale dont s'approche du centre de forces une particule passant avec un paramètre d'impact l. La quantité r_0 est la racine de l'équation

$$1-\frac{l^2}{r_0^2}-\frac{2U(r_0)}{mv_0^2}=0.$$

§ 2. Rayonnement dipolaire magnétique. Rayonnement quadrupolaire électrique

312. $I=\dfrac{2\beta^4H^4\mu^2}{3c^3}\sin\theta_0$.

313. $I=\dfrac{a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5}$.

314. $I=\dfrac{2l^2\mu_l^2\omega^4\psi_0^2}{3c^3}\cos^2\omega t, \quad \omega=\dfrac{2}{l}\sqrt{\dfrac{3\mu_l H}{m_l}}$.

315. Le moment électrique dipolaire d du système de charges doit satisfaire à la condition $\dddot{\mathbf{d}}\equiv 0$.

316. $I=\dfrac{e^4}{6m^2c^5}[E^2v^2-(\mathbf{Ev})^2]$.

317. $I=\dfrac{Q^2R^4\omega_0^6\psi_0^2}{75c^5}$.

318. $I=\dfrac{Q^2\omega^2}{600c}\left(\dfrac{QHR}{mc^2}\right)^4\sin^2\theta$.

319. $I=\dfrac{8}{3c}\left(\dfrac{\pi^2J^2R^2H\psi_0}{mc^3}\right)^2\cos^2\sqrt{\dfrac{2\pi JH}{mc}}\,t$.

320. $\mathscr{E}=\sqrt{2\pi\alpha}\,\dfrac{\alpha l^4J_0^2}{c^5}$.

321. $I=\dfrac{50a^4e^2}{3c^5}\dot\psi^6(4\ddot\psi^2+\dot\psi\dddot\psi)^2$.

322. Dans le système de coordonnées du centre d'inertie le rayonnement dipolaire magnétique est nul. Dans d'autres systèmes de coordonnées le rayonnement dipolaire magnétique existe.

323. Si l'origine des coordonnées est choisie au centre d'inertie, alors, après le passage aux coordonnées relatives, le moment magnétique de deux particules chargées s'exprime par le moment cinétique total qui dans le cas d'un système fermé garde une valeur constante. C'est pourquoi, la dérivée par rapport au temps, du moment magnétique devient identiquement nulle et donc le rayonnement dipolaire magnétique est aussi nul.

324. Le moment magnétique du système est proportionnel à son moment cinétique. D'après l'équation du mouvement, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du système est égale au moment des forces extérieures. Ce dernier est nul parce que le système est fermé. Cela signifie que la dérivée par rapport au temps des moments cinétique et magnétique est identiquement nulle et le rayonnement dipolaire magnétique est absent.

325. Le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ du système de particules chargées s'exprime par le moment cinétique total $\mathbf{M}$ à l'aide de la formule

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}. \qquad (1)$$

Dans un champ magnétique extérieur, l'équation du mouvement du moment $\mathbf{M}$ est de la forme

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{H}}{2mc},$$

ce qui signifie que le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ tourne autour de la direction $\mathbf{H}$ avec une vitesse angulaire $-\boldsymbol{\Omega}$. La rotation du vecteur $\boldsymbol{\mu}$ produit un rayonnement dipolaire magnétique de fréquence $\Omega = \frac{eH}{2mc}$. Les intensités des champs magnétique et électrique dans la zone d'onde ont pour expressions:

$$\mathbf{H_M} = \frac{e^2H^2}{4m^2c^4r}(\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\mu}_\perp \times \mathbf{n})), \quad \mathbf{E_M} = \mathbf{H_M} \times \mathbf{n},$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unité porté à partir du centre du système vers le point d'observation et $\boldsymbol{\mu}_\perp$ la composante du moment magnétique perpendiculaire au vecteur $\mathbf{H}$.

326. $I = \frac{4\mu_0^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\frac{\Delta\omega t + \alpha}{2}$.

327. Le moment magnétique total du système est

$$\mu=\mu_0\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\omega+n\varepsilon)t=\mu_0\,\mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{N-1}e^{in\varepsilon t}\right)=$$

$$=\mu_0\,\mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\frac{1-e^{iN\varepsilon t}}{1-e^{i\varepsilon t}}\right)=\mu_0\frac{\sin\frac{N\varepsilon t}{2}}{\sin\frac{\varepsilon t}{2}}\cos\left(\omega+\frac{N-1}{2}\varepsilon\right)t.$$

L'intensité de rayonnement prise en valeur moyenne entre les instants t et $t+2\pi/\omega$ s'écrira

$$I=\frac{\mu_0^2\omega^4}{3c^3}\frac{\sin^2\frac{N\varepsilon t}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon t}{2}}.$$

328. $I=\frac{N^2\mu_0^2\omega^4}{3c^3}e^{-\frac{2|t|}{\tau}},\quad \mathscr{E}=\frac{N^2\mu_0^2\omega^4\tau}{3c^3}.$

329. L'intensité de rayonnement quadrupolaire électrique est indépendante du choix de l'origine des coordonnées si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\dddot{Q}\equiv 0,\quad \dddot{\mathbf{d}}\equiv 0,$$

où Q et $\mathbf{d}$ sont respectivement la charge totale et le moment électrique dipolaire du système rayonnant.

330. Le rayonnement dipolaire électrique est nul. L'intensité cherchée vaut la somme des intensités de rayonnement dipolaire magnétique et de rayonnement quadrupolaire électrique du système de deux charges.

Commençons par résoudre le problème des oscillations de la boule dans l'hypothèse où l'énergie rayonnée est négligeable par rapport à son énergie totale. En choisissant l'origine des coordonnées au point milieu de la barre et en confondant le plan XY avec le plan d'oscillations (l'axe des X est parallèle à la force de pesanteur), on obtient pour les coordonnées de la boule les expressions suivantes

$$x=l,\quad y=l\psi,\quad z=0.$$

Ici, ψ est l'angle d'écart de la barre par rapport à la position verticale, qui varie suivant une loi harmonique $\psi=\psi_0\cos\omega t$, où $\omega=\sqrt{g/l}$ et g est l'accélération de la pesanteur. En déterminant les coordonnées de la boule, nous avons utilisé le développement en série suivant le petit paramètre $|\psi|\ll 1$ et rejeté tous les termes en ψ dont le degré est supérieur au premier.

Connaissant la loi de variation des coordonnées de la boule, on détermine la variation des coordonnées des deux charges en fonc-

tion du temps. Après cela, l'intensité de rayonnement dipolaire magnétique se calcule par la formule générale

$$I_\mu = \frac{e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{3c^5}.$$

Dans l'expression donnant le tenseur de moment électrique quadrupolaire du système de deux charges, il convient aussi de rejeter les termes de degrés supérieurs en angle ψ parce que la boule effectue de petites oscillations

$$D_{\alpha\beta} = 2el^2 \begin{pmatrix} 2 & 3\psi & 0 \\ 3\psi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, la moyenne temporelle de l'intensité de rayonnement quadrupolaire électrique prend la forme

$$I_D = \frac{e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{5c^5}.$$

L'intensité totale du rayonnement des deux charges est égale à la somme des intensités de rayonnement dipolaire magnétique et de rayonnement quadrupolaire électrique

$$I = \frac{8e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{15c^5}.$$

331. $I = \frac{(l-l_0)^2}{15c} \left(\frac{em_1 m_2 \omega^3}{m (m_1 + m_2) c^2} \right)^2 [4(l - l_0)^2 + l^2].$

332. Dans le système du centre d'inertie, le moment électrique quadrupolaire total des fragments du noyau qui s'éloignent l'un de l'autre suivant l'axe des X est de la forme

$$D_{\alpha\beta} = \frac{eZA_1A_2x^2}{A(A_1+A_2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où x est la coordonnée de la particule de masse réduite

$$\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m$$

et m est la masse du nucléon. En utilisant l'équation de Newton et le principe de la conservation de l'énergie

$$\mu \ddot{x} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x^2}, \quad \frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} = \mathscr{E}_0,$$

il n'est pas difficile d'obtenir la relation

$$\frac{d^3 x^2}{dt^3} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\mu} \frac{\dot{x}}{x^2}.$$

Après cela, le problème de l'énergie se ramène au calcul de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\dot{x}}{x^4} dx = \frac{16}{105} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\mathscr{E}_0^{7/2}}{Z_1^3 Z_2^3 e^6},$$

où x_0 est la distance initiale entre les fragments (voir aussi la résolution du problème 297). En définitive, l'énergie de rayonnement quadrupolaire électrique dû au mouvement des fragments s'exprime par la formule

$$\mathscr{E} = \frac{64}{1575} \left(\frac{A_1 + A_2}{2A_1 A_2}\right)^{1/2} \left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^{5/2} \frac{\mathscr{E}_0}{A_1 A_2}.$$

333. En calculant la dérivée troisième par rapport au temps du tenseur

$$D_{\alpha\beta} = e\,(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

de moment électrique quadrupolaire de la charge e, on ne devra pas oublier que l'accélération $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$ du proton est constante. Donc,

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = 3e\,(3\dot{x}_\alpha \ddot{x}_\beta + 3\ddot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - 2\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\,\delta_{\alpha\beta}).$$

La somme cherchée $\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha}$ est calculée sous sa forme générale après quoi l'accélération du proton est exprimée par $\mathbf{E}$. Finalement, l'intensité de rayonnement quadrupolaire s'écrira sous la forme

$$I = \frac{3e^4}{10m^2c^5} [(\mathbf{vE})^2 + 3v^2E^2].$$

334. $\frac{1}{\mathscr{E}} = \frac{32e^2\omega^2 t}{5m^2c^5} + \frac{1}{\mathscr{E}_0}.$

335. $\psi = \pi \pm 4\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{R\omega}{c},$

$$I_d = \frac{4e^2R^2\omega^4}{3c^3}(1 + \cos\psi), \quad I_D = \frac{32e^2R^4\omega^6}{5c^5}\cos^2\psi.$$

336. $I_d = \frac{2d^2\omega^4}{3c^3}, \quad I_\mu = 0, \quad I_D = \frac{32R^2d^2\omega^6}{5c^5}.$

I n d i c a t i o n. Un dipôle ponctuel de moment $\mathbf{d}$ doit être considéré comme le cas limite d'un système de deux charges e et $-e$, dont la distance l se réduit jusqu'à zéro alors que la valeur absolue des charges croît indéfiniment de sorte que

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d}, \qquad (1)$$

où le vecteur $\mathbf{l}$ est dirigé de la charge négative vers la charge positive.

C'est pourquoi le moment magnétique produit par le dipôle tournant est la limite de la somme suivante:

$$\boldsymbol{\mu}=\lim_{\substack{l\to 0\\ e\to\infty}}\frac{e}{2c}\left[\left(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{l}}{2}\right)\times\left(\dot{\mathbf{r}}+\frac{\dot{\mathbf{l}}}{2}\right)-\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{l}}{2}\right)\times\left(\dot{\mathbf{r}}-\frac{\dot{\mathbf{l}}}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2c}\left[(\mathbf{d}\times\dot{\mathbf{r}})+(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{d}})\right]=\frac{d}{cR}\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)$$

$\mathbf{r}$ étant le rayon vecteur du dipôle tournant.

Quant au tenseur de moment électrique quadrupolaire, il est commode de le déterminer d'abord dans un système de coordonnées tournantes $X'Y'Z'$ dont l'axe des Z' se confond avec l'axe de rotation et l'axe des X' passe par le dipôle parallèlement à son moment $\mathbf{d}$. Dans ce cas, le dipôle est considéré comme système de deux charges e et $-e$, situées à une certaine distance fixe l l'une de l'autre. Après avoir déterminé le tenseur de moment électrique quadrupolaire $D'_{\alpha\beta}$ pour la valeur fixe l dans le système de coordonnées tournantes, il convient d'effectuer le passage à la limite (1) pour chaque composante de ce tenseur. Finalement, le tenseur cherché prendra la forme

$$D'_{\alpha\beta}=2Rd\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

En réalisant un changement de coordonnées, on calcule le tenseur de moment électrique quadrupolaire $D_{\alpha\beta}$ dans le système de coordonnées XYZ au repos dont l'axe des Z est confondu avec l'axe de rotation et l'origine avec le centre de la circonférence:

$$D_{\alpha\beta}=2Rd\begin{pmatrix}3\cos^2\omega t-1 & 3\sin\omega t\cos\omega t & 0\\ 3\sin\omega t\cos\omega t & 3\sin^2\omega t-1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

337. $I=\dfrac{128R^2d^2\omega^6}{5c^5}$.

338. $I=\dfrac{16a^2d^2\omega^6}{15c^5}$.

339. $I_\mu=\dfrac{a^2d_0^2\omega^6}{3c^5}$, $I_D=\dfrac{a^2d_0^2\omega^6}{5c^5}$.

340. $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\exp\left(-\dfrac{8e^2a^2\omega^4t}{15mc^5}\right)$.

341. Le rayonnement est nul.

342. $I=\dfrac{2Q^2r_0^4\omega^6\varepsilon^2}{375c^5}\sin^2\omega t$.

343. $I = \frac{Q^2 R^4 \omega^6}{10 c^5}$.

344. La précession de l'anneau uniformément chargé produit un rayonnement quadrupolaire électrique. Le tenseur $D'_{\alpha\beta}$ de moment électrique quadrupolaire de l'anneau se calcule sans difficulté dans un système de coordonnées avec prime $X'Y'Z'$, solidaire de l'anneau tournant (v. fig. 4). Dans ce cas, les composantes non diagonales du tenseur $D'_{\alpha\beta}$ s'annulent alors que les composantes diagonales prennent la forme

$$D'_{11} = D'_{22} = \pi R^3 q, \quad D'_{33} = -2\pi R^3 q.$$

La matrice $a_{\alpha\beta}$ de changement de coordonnées $x_\alpha = a_{\alpha\beta} x'_\beta$ du système tournant en système au repos se détermine par voie habituelle :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

où l'on a introduit la notation $\psi = \omega t$. Le tenseur de moment électrique quadrupolaire dans le système de coordonnées au repos se calcule par la formule générale

$$D_{\alpha\beta} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} D'_{\delta\gamma} = a_{\alpha\delta} D'_{\delta\gamma} a^T_{\gamma\beta}.$$

Finalement, l'intensité de rayonnement quadrupolaire électrique prend la forme

$$I = \frac{\pi^2 q^2 R^6 \omega^6}{10 c^5} (15 \sin^4\theta + \sin^2\theta).$$

345. $I = \frac{8 Q^2 l^4 \omega^6}{45 c^5}$.

346. $I_\mu = \frac{Q^2 (a^2 + b^2)\, \theta_0^2 \omega^6}{150 c^5} \sin^2 \omega t,$

$$I_D = \frac{Q^2 (a^2 - b^2)^2\, \theta_0^2 \omega^6}{250 c^5} \sin^2 \omega t.$$

347. Le tenseur de moment électrique quadrupolaire du disque est :

$$D_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$D_{11} = \frac{Q}{4}(2a^2 - b^2), \quad D_{22} = \frac{Q}{4}(2b^2 - a^2), \quad D_{33} = -\frac{Q}{4}(a^2 + b^2),$$

où $Q = \pi ab\sigma$ est la charge totale. Lors d'une déformation, les demi-axes a et b du disque varient dans le temps suivant une loi

$$a = R\,[1 + \varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1)], \quad b = R\,[1 + \varepsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2)],$$

où les grandeurs ε_1 et ε_2 sont proportionnelles au petit paramètre β et donc sont petites elles aussi : $\varepsilon_1 \ll 1$ et $\varepsilon_2 \ll 1$. D'après l'hypo-

thèse, la surface du disque est égale à celle d'un cercle de rayon R, si l'on néglige les termes quadratiques en paramètre β. Une telle condition conduit à une relation qui doit être identiquement vérifiée pour tout t:

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \varepsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \equiv 0.$$

De cette identité on déduit les égalités $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$.

De façon analogue, la loi de variation du paramètre de déformation conduit à l'identité

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \equiv \beta \cos \omega t,$$

d'où on déduit $\varepsilon_1 = \beta$ et $\alpha_1 = 0$. Ainsi, les composantes diagonales du tenseur de moment électrique quadrupolaire prennent la forme

$$D_{11} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4}(1 + 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{22} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4}(1 - 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{33} = -\frac{\pi R^4 \sigma}{2}.$$

En gardant les termes de degré le moins élevé en paramètre β, on trouve la moyenne temporelle sur une période T de l'intensité de rayonnement

$$I = \frac{\pi^2 R^8 \sigma^2 \omega^6 \beta^2}{80 c^5}.$$

348. $I = \dfrac{a_0^{10} \rho^2 \omega^6 \beta^2}{540 c^5}$.

349. Le potentiel vecteur (IV.11) dans la zone d'onde s'exprime, compte tenu des corrections d'ordre v_i^2/c^2, par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2 r} + \frac{1}{2c^3 r} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} e_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i)^2 \mathbf{v}_i,$$

où le rayon vecteur $\mathbf{r}_i$ de la i-ième charge, ainsi que les grandeurs $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{v}_i$ sont pris à l'instant $t - r/c$. Ici, on a noté

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta,$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i (3 x_{i\alpha} x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

L'intensité de champ magnétique de l'onde émise est

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}.$$

En calculant le flux du vecteur de Poynting à travers la sphère de grand rayon, on trouve l'intensité de rayonnement avec la précision donnée

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \frac{1}{4\pi c^5}\int (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^{N} e_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i)^2 (\mathbf{v}_i \times \mathbf{n})\, d\Omega.$$

Le dernier terme exprime la quantité ΔI cherchée qui, après l'intégration par rapport aux angles, prend la forme

$$\Delta I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}}{15c^5} \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^{N} e_i \left[2r_i^2 \mathbf{v}_i - (\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i)\, \mathbf{r}_i\right].$$

350. Puisque le rayonnement dipolaire magnétique est absent, l'intensité de rayonnement de la charge e est donnée, compte tenu des termes d'ordre v^2/c^2, par la somme de trois termes

$$I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \Delta I.$$

La quantité ΔI a été calculée dans le problème précédent :

$$\Delta I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}}{15c^5} \frac{d^3}{dt^3} \left[2r^2\mathbf{v} - (\mathbf{r}\mathbf{v})\,\mathbf{r}\right] =$$

$$= \frac{2e^2}{5c^5}\left[3v^2\dot{\mathbf{v}}^2 + (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2 + 2\,(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})\,\dot{\mathbf{v}}^2\right] = \frac{4e^2E^2}{5m^2c^5}\left(2v^2 + \frac{e\,(\mathbf{r}\mathbf{E})}{m}\right),$$

où $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ représentent respectivement le rayon vecteur, la vitesse et l'accélération de la charge.

L'expression de l'intensité de rayonnement quadrupolaire électrique en fonction de la vitesse de la charge a été obtenue dans le problème 333 :

$$\frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} = \frac{6e^4E^2v^2}{5m^2c^5}.$$

L'accélération qui intervient dans la formule donnant l'intensité de rayonnement dipolaire électrique doit être calculée compte tenu des corrections relativistes d'ordre v^2/c^2. A cet effet, utilisons l'équation du mouvement $\frac{d}{dt}\,\mathbf{p} = e\mathbf{E}$ et les formules

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}\mathscr{E}}{c^2}, \quad \mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d}{dt}\mathscr{E} = e\mathbf{v}\mathbf{E},$$

qui sont valables pour une particule rapide. Ces relations permettent d'exprimer l'accélération par la vitesse. En développant l'accélération trouvée en série suivant le petit paramètre v^2/c^2 et en

gardant la seule première correction relativiste, on obtient

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2E^2}{m^2}\left(1-3\frac{v^2}{c^2}\right).$$

En faisant la somme des termes partiels, on trouve en définitive

$$I = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}\left(1+\frac{6v^2}{5c^2}+\frac{6e\,(\mathbf{rE})}{5mc^3}\right). \qquad (1)$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on a $\mathbf{r}\,(0) = \mathbf{v}\,(0) = 0$. Alors à un instant quelconque t, on obtient

$$\frac{e\,(\mathbf{rE})}{mc^2} = \frac{v^2}{2c^2},$$

On voit que la correction à apporter à l'intensité de rayonnement est proportionnelle à v^2/c^2.

Comme il a été dit dans l'introduction au chapitre IV, l'intensité de rayonnement que nous considérons ici dépend du choix de l'origine des coordonnées à l'intérieur du système rayonnant. En particulier, à l'instant où la particule chargée se trouve à l'origine des coordonnées, l'intensité de rayonnement trouvée (1) est numériquement égale à l'intensité de rayonnement d'une particule relativiste (V.59), si l'on pose $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ et tient compte de la correction d'ordre v^2/c^2 (voir le problème 449). Cette circonstance tient à ce qu'à l'instant considéré la quantité (IV.16) est numériquement égale à l'intensité de rayonnement (V.59) de la particule relativiste alors que le flux du vecteur de Poynting est calculé à travers la même sphère de grand rayon dans les deux cas indiqués.

§ 3. Décomposition spectrale du rayonnement

351. La dérivée seconde par rapport au temps du moment électrique dipolaire de l'électron est

$$\ddot{\mathbf{d}}\,(t) = \begin{cases} \frac{e^2\mathbf{E}_0}{m}\,e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t & \text{pour } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

La composante de Fourier de cette fonction est de la forme:

$$\ddot{\mathbf{d}}\,(\omega) = \frac{e^2\mathbf{E}_0}{2m}\left(\frac{\alpha+i\,(\omega+\omega_0)}{(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha+i\,(\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}\right).$$

Pour l'énergie émise sur des fréquences allant de ω à $\omega + d\omega$ on obtient l'expression suivante

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4E_0^2}{3\pi m^2c^3}\,\frac{\omega^2+\alpha^2}{[(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2]\,[(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2]}\,d\omega.$$

352. $d\mathscr{E}_\omega = \frac{2J_0^2 l^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^2}{[(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2][(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2]} d\omega.$

353. $d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}} d\omega$, où on a noté

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho|e|}{3m}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc} \quad (\gamma \ll \omega_0).$$

354. L'équation du mouvement de l'oscillateur tenant compte de la force de frottement de rayonnement

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}(t) \qquad (1)$$

est définie dans un intervalle de temps infini $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$. Dans la région $t \leqslant 0$, les premier et second membres de cette équation sont identiquement nuls.

Développons en intégrale de Fourier les deux membres de l'équation (1) et utilisons les relations qui existent entre les composantes de Fourier

$$\ddot{\mathbf{r}}(\omega) = -\omega^2\mathbf{r}(\omega), \quad \dddot{\mathbf{r}}(\omega) = i\omega^3\mathbf{r}(\omega).$$

Résolvons l'équation algébrique ainsi obtenue par rapport à la quantité $\mathbf{r}(\omega)$:

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega},$$

où $\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$ et la fonction $\mathbf{E}(\omega)$ est connue:

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_0^\infty \mathbf{E}(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

D'après les formules (IV.20) et $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -e\omega^2\mathbf{r}(\omega)$, l'énergie de rayonnement dipolaire électrique par l'intervalle de fréquence de ω à $\omega + d\omega$ prend la forme

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^4}{3\pi m^2 c^3}\frac{\omega^4|\mathbf{E}(\omega)|^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2} d\omega.$$

355. $\Delta\omega = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$.

356. Dans la zone d'onde, le vecteur de Poynting peut être exprimé par l'intensité de champ électrique $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^2\mathbf{n}$. L'énergie totale traversant une aire unité placée au point d'observation perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde est dé-

terminée par l'expression

$$\mathscr{E} = \frac{c}{4\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}^2\,dt = \frac{c}{4\pi^2}\int_0^\infty |\mathbf{E}(\omega)|^2\,d\omega = \int_0^\infty \mathscr{E}(\omega)\,d\omega,$$

où

$$\mathscr{E}_n(\omega) = \frac{cE_0^2}{16\pi^2}\,\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}.$$

La quantité $\mathscr{E}_n(\omega)$ décrit la composition spectrale de l'impulsion électromagnétique ayant traversé l'appareil. La représentation graphique de la fonction $\mathscr{E}_n(\omega)$ donne le contour de la raie spectrale. On appelle demi-largeur $\Delta\omega/2$ de la raie spectrale une valeur du module de la différence $\omega - \omega_0$ pour laquelle la fonction $\mathscr{E}_n(\omega)$ devient égale à la moitié de sa valeur maximale. On en trouve pour la largeur $\Delta\omega$ de la raie spectrale la valeur suivante: $\Delta\omega = 2\alpha$.

357. $\Delta\omega = \dfrac{2}{\tau\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$

358. $\Delta\omega = \dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{T_0}.$

359. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{8e^4E^2}{3\pi m^2c^3\omega^2}\sin^2\left(\omega\sqrt{\dfrac{ml}{2eE}}\right)d\omega.$

360. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{8e^4E^2}{3\pi m^2c^3\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega m v_0\cos\alpha}{eE}\,d\omega.$

361. Le temps τ d'interaction entre le proton et le noyau est de l'ordre de grandeur de l/v_0. L'énergie émise aux fréquences faibles se décrit par la formule

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2}{3\pi c^3}\,d\omega,$$

dans laquelle $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses du proton respectivement avant et après la diffusion sur le noyau. L'énergie émise est négligeable par rapport à l'énergie totale. Aussi, l'énergie cinétique du proton n'est-elle pas changée après la diffusion. Au cours de la diffusion, la vitesse du proton tourne d'un petit angle $\theta \ll 1$, tout en restant inchangée en valeur absolue. Cette circonstance permet de calculer l'angle de diffusion θ en procédant comme suit. Choisissons l'axe des X dans le sens de la vitesse $\mathbf{v}_1$ du proton incident et amenons le plan XY en coïncidence avec le plan de diffusion. Alors, il est évident que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}.$$

Dans le cas de la diffusion sur de petits angles, on peut écrire de façon approchée $\operatorname{tg}\theta = \theta$ et $v_{2x} = v_2 = v_0$. La composante transversale de la vitesse après la diffusion se calcule par intégration de

l'équation de Newton $m\dot{v}_y = F_y$. La trajectoire étant rectiligne, on obtient

$$v_{2y} = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} F_y\,dt = \frac{lZe^2}{mv_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+l^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mv_0 l}.$$

Le triangle construit sur les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ est un triangle isocèle avec un petit angle θ au sommet. Cela permet de calculer le module de la différence de ces vitesses par la formule

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_0\theta.$$

En réunissant les résultats obtenus, on a en définitive

$$dN_\omega = \frac{d\mathcal{E}_\omega}{\hbar\omega} = \frac{8}{3\pi\hbar\omega c^3}\left(\frac{Ze^3}{mv_0 l}\right)^2 d\omega.$$

362. Passons au système du centre d'inertie et dirigeons l'axe des X à la rencontre de la particule de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ volant de l'infini vers le centre du champ répulsif coulombien. Son mouvement se décrit par l'équation de Newton

$$\mu\ddot{x} = \frac{e_1 e_2}{x^2}$$

avec les conditions supplémentaires $x(0) = l$ et $\dot{x}(0) = 0$ pour $t = 0$.

Le problème de rayonnement fait intervenir la dérivée seconde du moment électrique dipolaire $\mathbf{d} = \mathbf{1}_x d$ donnée par l'expression

$$\ddot{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\ddot{x} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\frac{e_1 e_2}{x^2}.$$

La composante de Fourier $\ddot{d}(\omega)$ de cette fonction s'exprime par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{dt}{x^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, passons à une nouvelle variable d'intégration qui est généralement utilisée dans les problèmes relatifs au mouvement dans un champ répulsif coulombien

$$t = \frac{1}{\omega_0}(\xi + \operatorname{sh}\xi), \quad x = l\operatorname{ch}^2\frac{\xi}{2},$$

où ω_0 est la fréquence caractéristique définie par

$$\omega_0 = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2e_1 e_2(m_1+m_2)}{l m_1 m_2}}.$$

Alors, la composante de Fourier s'écrira

$$\ddot{d}(\omega)=\frac{4e_1e_2}{\omega_0 l^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)F(\omega),$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\mathrm{sh}\,\xi)}\,\frac{d\xi}{1+\mathrm{ch}\,\xi}.$$

Prenons cette dernière intégrale par parties, après quoi changeons la variable d'intégration $\xi = i\pi + \eta$ et utilisons la formule connue pour la dérivée par rapport à son argument z de la fonction de Hankel de première espèce d'ordre p:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta-z\,\mathrm{sh}\,\eta}\,\mathrm{sh}\,\eta\,d\eta=-i\pi H_p^{(1)\prime}(z).$$

Alors, la fonction $F(\omega)$ prend la forme

$$F(\omega)=\frac{\pi\omega}{\omega_0}e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}}H^{(1)\prime}_{i\frac{\omega}{\omega_0}}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

L'énergie émise sous la forme des ondes dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle $d\omega$ se décrit par la formule

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2|F(\omega)|^2\,d\omega.$$

Dans le cas des fréquences faibles $\omega \ll \omega_0$, prenons dans l'aide-mémoire [9] l'expression asymptotique pour la fonction de Hankel et sa dérivée

$$H_0^{(1)\prime}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\frac{2\omega_0}{\pi\omega},$$

si bien que l'énergie émise aux fréquences faibles prend la forme

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{16e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega.$$

Dans le cas des fréquences élevées $\omega \gg \omega_0$, utilisons la formule donnée dans l'ouvrage [1]:

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\quad \text{pour } \nu\gg 1,$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma de l'argument $z = 2/3$. On voit qu'aux fréquences élevées, la densité spectrale du rayonnement décroît essentiellement suivant une loi exponentielle

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{4e_1e_2m_1m_2}{9\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[6^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/3}e^{-\frac{2\pi\omega}{\omega_0}}\,d\omega.$$

363. En appliquant la même méthode de résolution que pour le problème précédent, on trouve la composition spectrale du rayonnement

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 |f(\omega)|^2 d\omega,$$

où l'on a introduit la notation

$$f(\omega) = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)}\frac{d\xi}{1+\operatorname{ch}\xi}. \qquad (1)$$

Pour $\omega \ll \omega_0$, la fonction $f(\omega)$ peut être remplacée par l'unité. Aux fréquences faibles, la densité spectrale du rayonnement est quatre fois moins grande que dans le problème précédent

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega.$$

Dans le domaine des fréquences élevées $\omega \gg \omega_0$, prenons l'intégrale (1) par parties pour que les termes qui apparaissent contiennent la fréquence ω au dénominateur. Prenons, toujours par parties, l'intégrale restante en augmentant la puissance de ω au dénominateur des termes qui suivent. En continuant indéfiniment ce processus, on obtient une série infinie suivant le paramètre $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$. Aux grandes fréquences, il suffit de se borner au premier terme de cette série asymptotique

$$f(\omega) = i\frac{\omega_0}{4\omega}.$$

A la différence du résultat obtenu dans le problème précédent, la densité spectrale du rayonnement décroît ici suivant une loi de puissance deux

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e_1^2e_2^2}{3\pi l^4c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{d\omega}{\omega^2}.$$

364. Supposons que l'instant zéro $t = 0$ corresponde au point d'arrêt des particules entrant en collision. Alors, dans le système du centre d'inertie, la dérivée seconde du moment électrique dipolaire des particules chargées est une fonction paire du temps t en cas d'une collision frontale suivie de l'éloignement des particules. Dans l'intervalle de temps $-\infty \leqslant t \leqslant 0$ (ou $0 \leqslant t \leqslant \infty$), les moments électriques dipolaires sont identiquement égaux pour les deux cas a et b, de sorte que

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(t) = \mathbf{l}G(t) \quad \text{pour } -\infty \leqslant t \leqslant \infty, \qquad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(t) = \mathbf{l}G(t) \quad \text{pour } -\infty \leqslant t \leqslant 0, \qquad (2)$$

$$(\text{ou } 0 \leqslant t \leqslant \infty),$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur unité constant et $G(t)$ une certaine fonction paire du temps t. Cette circonstance permet d'écrire

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = \mathbf{1} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \mathbf{1}2 \int_{-\infty}^{0} G(t) \cos \omega t\, dt = \mathbf{1}2 \operatorname{Re} f(\omega), \qquad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = \mathbf{1} \int_{-\infty}^{0} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \mathbf{1} f(\omega), \qquad (4)$$

où $f(\omega) = \int_{-\infty}^{0} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt$.

En intégrant par rapport au temps l'intensité de rayonnement dipolaire électrique, compte tenu des relations (1) et (2), on arrive à la conclusion que les énergies totales de rayonnement dans les cas a et b sont liées par l'égalité $\mathscr{E}^a = 2\mathscr{E}^b$. D'autre part, les énergies totales peuvent être représentées sous la forme de la décomposition spectrale, ce qui donne

$$\int_0^{\infty} |\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega)|^2\, d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega)|^2\, d\omega.$$

En se servant des formules (3) et (4), on peut mettre cette relation sous la forme

$$2\int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2\, d\omega = \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2\, d\omega.$$

L'égalité ainsi obtenue peut être démontrée par une autre voie. A cet effet, considérons séparément l'intégrale

$$2\int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{0} dt \int_{-\infty}^{0} dt'\, G(t)\, G(t') \cos \omega t \cos \omega t'.$$

Utilisons les relations connues

$$2\cos \omega t \cos \omega t' = \cos \omega (t - t') + \cos \omega (t + t'),$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau\, d\omega$$

et mettons cette intégrale sous la forme

$$2\int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2\, d\omega = \pi \int_0^{\infty} G(t)\, G(t') \left[\delta(t - t') + \delta(t + t')\right] dt\, dt'.$$

Sous le signe de l'intégrale, le terme contenant la fonction delta $\delta(t+t')$ n'apporte aucune contribution et, de ce fait, le second membre de la dernière égalité s'écrira :

$$\pi\int_0^\infty G^2(t)\,dt=\int_0^\infty |f(\omega)|^2\,d\omega.$$

365. $I=\frac{4\omega_0^4}{3c^3}\sum_{n=1}^\infty n^4|\mathbf{d}_n|^2,\ \mathbf{d}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathbf{d}e^{in\omega_0 t}\,dt.$

366. $d\mathscr{E}_\omega=\frac{2\mu_0^2T^2\omega^4}{3c^3}e^{-\frac{\omega^2T^2}{2}}\,d\omega.$

367. $d\mathscr{E}_\omega=\frac{2\pi J_0^2S^2\tau^2}{3c^5}\omega^4e^{-2\omega\tau}\,d\omega.$

I n d i c a t i o n. Déterminer le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}(t)$ du courant et puis, utiliser la relation entre les composantes de Fourier $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)=-\omega^2\boldsymbol{\mu}(\omega)$ et l'intégrale donnée dans les tables de fonctions

$$\int_0^\infty\frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}\quad\text{pour } a>0.$$

368. $d\mathscr{E}_\omega=\frac{2a^2d_0^2\omega_0^6}{15\pi c^5}\cdot\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\,d\omega.$

369. $d\mathscr{E}_\omega=\frac{4a^2d_0^2\omega_0^6}{15\pi c^5}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\,d\omega.$

370. Dans le système du centre d'inertie des fragments du noyau, le tenseur de moment électrique quadrupolaire est

$$D_{\alpha\beta}=\frac{eZA_1A_2x^2}{A(A_1+A_2)}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

où le mouvement s'effectue suivant l'axe des X. En partant de l'équation du mouvement et du principe de la conservation de l'énergie, on justifie l'égalité

$$\frac{d^3}{dt^3}x^2=\frac{2e^2Z_1Z_2(A_1+A_2)}{mA_1A_2}\frac{\dot{x}}{x^2}$$

qui permet de simplifier la formule de la composante de Fourier cherchée

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)=\frac{2e^3ZZ_1Z_2}{mA}T_{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\frac{dx}{x^2},$$

$$T_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Effectuons le changement de variable d'intégration

$$t=\frac{1}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi),\quad x=\frac{e^2Z_1Z_2}{\mathscr{E}_0}\operatorname{ch}^2\frac{\xi}{2},$$

où ω_0 est la fréquence caractéristique définie par

$$\omega_0=\frac{2\mathscr{E}_0}{e^2Z_1Z_2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0(A_1+A_2)}{mA_1A_2}}.$$

Alors, on obtient

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)=\frac{4eZ\mathscr{E}_0}{mA}T_{\alpha\beta}F(\omega),$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)}\frac{\operatorname{sh}\xi\,d\xi}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}.$$

Prenons la dernière intégrale par parties, changeons la variable d'intégration $\xi=i\pi+\eta$ et utilisons la formule pour la fonction de Hankel de première espèce d'ordre p et d'argument z

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{p\eta-z\operatorname{sh}\eta}\,d\eta=i\pi H_p^{(1)}(z). \tag{1}$$

Une telle transformation permettra de représenter le résultat final sous une forme commode pour l'étude aux fréquences faibles et élevées

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{8Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2|F(\omega)|^2d\omega,$$

$$F(\omega)=-\frac{\pi\omega}{\omega_0}e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}}H^{(1)}_{i\frac{\omega}{\omega_0}}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Etant donné qu'aux fréquences faibles $\frac{\omega}{\omega_0}=|p|=|z|\ll 1$ une région efficace d'intégration dans (1) contient $\eta\gg 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{p\eta-z\operatorname{sh}\eta}\,d\eta\approx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{sh}\eta}d\eta=H_0^{(1)}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

En outre, de l'ouvrage [9], prenons $iH_0^{(1)}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\frac{2}{\pi}\ln\frac{2\omega_0}{\gamma\omega}$ pour $\omega\ll\omega_0$, où $\gamma=e^C=1{,}781\ldots$, et C est la constante d'Euler. Ainsi, dans le domaine des fréquences faibles $\omega\ll\omega_0$ on a:

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{32Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\ln\frac{2\omega_0}{\gamma\omega}\right)^2d\omega.$$

Pour un argument imaginaire pur de grande valeur, l'asymptotique de la fonction de Hankel est donnée dans l'ouvrage [1]:

$$iH_{i\nu}^{(1)}(i\nu)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\quad\text{pour } \nu\gg 1,$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma de l'argument $z = 1/3$. Cela permet de déterminer la composition spectrale du rayonnement aux fréquences élevées $\omega \gg \omega_0$:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{45\pi c A^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left[6^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{4/3} e^{-\frac{2\pi\omega}{\omega_0}}\, d\omega.$$

371. En opérant comme dans le problème précédent, on obtient la composition spectrale du rayonnement lors de l'éloignement respectif des fragments du noyau

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{15\pi c A^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 |f(\omega)|^2\, d\omega,$$

$$f(\omega) = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)}\frac{\operatorname{sh}\xi\, d\xi}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}, \qquad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\mathscr{E}_0}{e^2Z_1Z_2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0(A_1+A_2)}{mA_1A_2}}.$$

Dans le domaine des fréquences faibles $\omega \ll \omega_0$, la fonction $f(\omega)$ peut être remplacée par le nombre 1/2. Alors, il vient

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2Z^2e^2}{15\pi c A^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 d\omega.$$

On voit que la densité spectrale de rayonnement aux fréquences faibles diffère notablement du résultat obtenu dans le problème précédent.

Dans le cas des fréquences élevées $\omega \gg \omega_0$, il convient de prendre l'intégrale (1) par parties pour que les termes qui apparaissent contiennent la fréquence ω au dénominateur. En répétant cette procédure, on obtient une série asymptotique suivant le paramètre $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$. En se bornant au premier terme de cette série, on obtient

$$f(\omega) = -\frac{1}{2^4}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Cela signifie qu'aux fréquences élevées $\omega \gg \omega_0$, la densité spectrale du rayonnement lors de l'éloignement des fragments du noyau décroît beaucoup plus lentement que dans le problème précédent où il s'agissait d'une collision frontale des noyaux suivie de leur éloignement

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{Z^2e^2}{480\pi c A^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 d\omega.$$

372. Indication. La méthode de démonstration est analogue à celle de résolution du problème 364.

373. $d\mathscr{E}_\omega = \frac{8e^2v^2R^2}{3\pi c^3(R^2+h^2)}\, d\omega$. Le domaine d'applicabilité de la formule est limité par la condition de petitesse de la quantité

$\hbar\omega$ devant l'énergie cinétique de la particule, condition indispensable afin d'exclure les effets quantiques dans le rayonnement.

374. $d\varkappa_\omega = \frac{4e^2v^2R^2}{3c^3}\,d\omega$. Le domaine d'applicabilité de la formule est limité par la même condition que dans le problème précédent.

§ 4. Répartition angulaire du rayonnement

375. L'intensité (IV.22) de rayonnement dipolaire électrique dans un élément $d\Omega$ d'angle solide s'exprime par l'intensité $\mathbf{H}$ du champ magnétique de l'onde émise. A son tour, le vecteur $\mathbf{H}$ dépend de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}_e$ de la particule suivant la formule

$$\mathbf{H} = \frac{e\,(\ddot{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{n})}{c^2 r},$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ r et est le rayon vecteur du point d'observation. L'accélération de la particule se détermine à partir de l'équation de Newton:

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e}{mc}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) = -\frac{evH_0}{mc}\,\mathbf{n}',$$

où

$$\mathbf{n}' = \mathbf{1}_x \cos\frac{eH_0t}{mc} + \mathbf{1}_y \sin\frac{eH_0t}{mc}.$$

Ici, $\mathbf{n}'$ est le vecteur unité orienté suivant le rayon vecteur $\mathbf{r}_e$ de la particule. L'intensité $dI\,(t)$ de rayonnement dipolaire électrique dans l'angle solide $d\Omega$ à l'instant t a pour expression

$$dI\,(t) = \frac{e^4v^2H_0^2}{4\pi m^2c^5}\,[1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2]\,d\Omega.$$

Le produit scalaire $\mathbf{n}\mathbf{n}'$ s'exprime par les angles polaires θ et ψ du point d'observation à l'aide de la relation

$$\mathbf{n}\mathbf{n}' = \sin\theta\cos\left(\frac{eH_0t}{mc} - \psi\right).$$

L'intensité dI de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, prise en valeur moyenne sur une période de mouvement de la particule, s'écrira

$$dI = \frac{e^4v^2H_0^2}{8\pi m^2c^5}\,(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega.$$

376. $dI = \frac{J^2S^2\omega^4}{8\pi c^5}\,(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega$, l'axe des Z étant choisi ici le long du vecteur $\boldsymbol{\omega}$.

377. $d\mathscr{E}_n = \frac{e^2}{15\pi R}\left(\frac{2Ze^2}{Rmc^2}\right)^{3/2}\sin^2\theta\,d\Omega$, où l'axe des Z est choisi le long de la trajectoire rectiligne du proton.

378. $dI = \frac{25}{10368} \frac{Q^2 R_0^4 \omega^6 \varepsilon^2}{\pi c^3} \sin^2 2\theta d\Omega$. L'origine des coordonnées est placée au point milieu du cylindre et l'axe des Z est dirigé suivant l'axe du cylindre.

I n d i c a t i o n. Voir la résolution du problème 347.

379. Plaçons l'origine du système de coordonnées cartésiennes au repos au point médian du cylindre et dirigeons l'axe des Z suivant le vecteur vitesse angulaire. Le système de coordonnées avec prime $X'Y'Z'$ solidaire du cylindre tourne autour de l'axe des Z' ($Z' \equiv Z$), l'axe des X' étant confondu avec l'axe du cylindre. Le tenseur de moment électrique quadrupolaire du cylindre chargé dans le système de coordonnées avec prime est facile à déterminer:

$$D'_{\alpha\beta} = D \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{Q}{4}\left(\frac{h^2}{3} - R^2\right).$$

En procédant au changement de coordonnées, on détermine le tenseur $D_{\alpha,\beta}$ du moment électrique quadrupolaire du cylindre tournant. La dérivée troisième de ce tenseur est

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = -12 D\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'intensité de champ magnétique de l'onde émise est donnée, au point d'observation de rayon vecteur $\mathbf{r}$ à l'instant $t' = t - r/c$, par la formule

$$\mathbf{H} = \frac{2D\omega^3}{c^3 r} \sin\theta\,(\mathbf{1} \times \mathbf{n}),$$

où $\mathbf{1} = \mathbf{1}_x = \sin(2\omega t' - \psi) - \mathbf{1}_y \cos(2\omega t' - \psi)$ $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Ici, θ et ψ sont les angles polaires du point d'observation et $\mathbf{n}$ est le vecteur unité indiquant la direction de propagation de l'onde. En prenant la temporelle moyenne de $(\mathbf{1} \times \mathbf{n})^2$ sur une période de la rotation

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{1} \times \mathbf{n})^2 dt' = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta),$$

on trouve la répartition angulaire de l'intensité de rayonnement

$$dI = \frac{Q^2\omega^6}{32\pi c^5}\left(\frac{h^2}{3} - R^2\right)^2 (1 - \cos^4\theta)\, d\Omega.$$

380. $dI = \frac{2e^2 l^4 \omega^6}{\pi c^5} (1 - \cos^4\theta)\, d\Omega$.

381. L'énergie rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$ sur les fréquences de ω à $\omega + d\omega$ peut être mise sous la forme

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c^3}\,[(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \times \mathbf{n}]^2\, d\Omega d\omega,$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont les vitesses de la particule avant et après la collision avec la sphère. Puisque l'énergie de rayonnement est très petite par rapport à l'énergie cinétique de la particule, la vitesse de celle-ci n'est pas changée en valeur absolue par suite de la collision: $v = v'$. En partant des considérations géométriques, il n'est pas difficile de déterminer la variation de l'énergie émise en fonction de l'angle

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\left(1 - \frac{l^2}{R^2}\right)\Big[\sin^2\theta + \frac{l^2}{R^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\psi) +$$
$$+ \frac{l}{R}\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}}\sin 2\theta\cos\psi\Big]\, d\Omega d\omega.$$

382. $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \dfrac{D_0^2T^2\omega^6\sin^2 2\theta}{256\pi c^5}\, e^{-\frac{\omega^2T^2}{2}}\, d\Omega d\omega.$

383. $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \dfrac{Q^2v^3}{15\pi Rc^3}\left(1 + \dfrac{5v}{8c}\cos\theta\right)\sin^2\theta d\Omega$, où θ est l'angle entre la vitesse v et la direction du point d'observation.

384. La répartition angulaire de l'énergie totale de rayonnement se décrit par la formule (IV.26) dans laquelle

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2r} + \frac{\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3r},$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{z}\mathbf{1}_z, \quad \dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} = 6e\,(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z})\, n_z\, (\mathbf{1}_z \times \mathbf{n}).$$

Dans ces expressions, l'axe polaire des Z est dirigé parallèlement à la vitesse de mouvement de la particule, alors que la coordonnée z et ses dérivées par rapport au temps sont de la forme

$$z(t) = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0t \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} v_0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0, \\ \dfrac{eE}{m}t + v_0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \dfrac{eE}{m}\tau + v_0 & \text{pour} \quad t \geqslant \tau, \end{cases}$$

$$\ddot{z}(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<0,\\ \dfrac{eE}{m} & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0 & \text{pour } t>\tau,\end{cases}$$

$$\dddot{z}(t)=\frac{eE}{m}\left[\delta(t)-\delta(t-\tau)\right],$$

où τ est le temps de mouvement dans le champ électrique extérieur.

Après avoir élevé au carré l'intensité de champ magnétique

$$\mathbf{H}=\frac{e^2}{c^2r}\left[\ddot{z}+\frac{1}{c}(3\dot{z}\ddot{z}+z\dddot{z})\,n_z\right](\mathbf{1}_z\times\mathbf{n}),$$

gardons, en plus du terme dipolaire, encore le terme d'interférence d'ordre v/c

$$H^2=\frac{e^2}{c^4r^2}\left[\ddot{z}^2+\frac{2}{c}\ddot{z}(3\dot{z}\ddot{z}+z\dddot{z})\,n_z\right](\mathbf{1}_z\times\mathbf{n})^2.$$

En calculant l'intégrale par rapport au temps dans la formule (IV.26), tenons compte de la propriété (A3.13) de la fonction delta. Finalement, on obtient

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^3E(v-v_0)}{4\pi mc^3}\left(1+\frac{5(v+v_0)}{2c}\cos\theta\right)\sin^2\theta\,d\Omega,$$

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2leE}{m}}.$$

385. Calculons l'intensité de champ magnétique du rayonnement en tenant compte du petit terme, linéaire en vitesse v de mouvement du proton:

$$\mathbf{H}=\frac{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{c^2r}+\frac{\dddot{D}\times\mathbf{n}}{6c^3r}=\frac{e}{c^2r}\left[\ddot{z}+\frac{1}{c}(3\dot{z}\ddot{z}+z\dddot{z})\,n_z\right](\mathbf{1}_z\times\mathbf{n}),$$

où l'axe polaire est choisi suivant la direction de mouvement du proton et la coordonnée z et ses dérivées par rapport au temps sont de la forme

$$z(t)=\frac{eE}{2m}(t+t_0)^2-\frac{l}{2}\quad\text{pour}\quad -t_0\leqslant t\leqslant t_0,$$

$$\dot{z}(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t\leqslant -t_0,\\ \dfrac{eE}{m}(t+t_0) & \text{pour } -t_0\leqslant t\leqslant t_0\\ \dfrac{eE}{m}2t_0 & \text{pour } t\geqslant t_0,\end{cases}$$

$$\ddot{z}(t)=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad t<-t_0\\ \dfrac{eE}{m} & \text{pour} \quad -t_0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 0 & \text{pour} \quad t>t_0,\end{cases}$$

$$\dddot{z}(t)=\frac{eE}{m}\left[\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)\right].$$

Pour origine des temps on prend l'instant où le proton passe par le point médian de la trajectoire dans le champ extérieur, de sorte que $2t_0$ est le temps de son mouvement dans ce champ.

La composante de Fourier de l'intensité de champ magnétique du rayonnement est

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)=\frac{e^2E}{mc^2r}\left[\left(1+\frac{3v}{2c}n_z\right)\frac{2\sin\omega t_0}{\omega}-\frac{1}{c}n_z\cos\omega t_0-\right.$$
$$\left.-i\frac{3vn_z}{c\omega^2t_0}(\omega t_0\cos\omega t_0-\sin\omega t_0\right](\mathbf{1}_z\times\mathbf{n}).$$

En gardant les termes d'ordre v/c, on obtient finalement

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{e^4E^2}{2\pi^2m^2c^3}\left[\left(1+\frac{3v}{c}\cos\theta\right)\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}-\frac{v\tau}{2c}\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\cos\theta\right]\sin^2\theta d\Omega,$$

où $\tau=2t_0=\sqrt{\dfrac{2ml}{eE}}$ est le temps de parcours dans le champ électrique extérieur et $v=\sqrt{\dfrac{2eEl}{m}}$ la vitesse du proton à la sortie de ce champ.

L'intégration de l'expression obtenue par rapport à la fréquence ω donne la répartition angulaire de l'énergie totale de rayonnement compte tenu du terme d'ordre v/c:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^3Ev}{4\pi mc^3}\left(1+\frac{5v}{2c}\cos\theta\right)\sin^2\theta d\Omega.$$

386. Le moment magnétique et le tenseur de moment électrique quadrupolaire du système de deux dipôles sont déterminés par les expressions

$$\mu=\frac{a\dot{d}}{c}\mathbf{1}_z,\quad D_{\alpha\beta}=6ad\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Introduisons les notations suivantes

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r},\quad \frac{1}{6}\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta=ad_0\omega^3\sin\omega t\cdot N_\alpha,$$

où $n_1=\sin\theta\cos\psi$, $n_2=\sin\theta\sin\psi$, $n_3=\cos\theta$, $N_1=\sin\theta\sin\psi$, $N_2=\sin\theta\cos\psi$, $N_3=0$. Alors, à une grande distance r des di-

pôles, l'intensité de champ magnétique de l'onde émise prend la forme

$$\mathbf{H} = \frac{ad_0\omega^3}{c^3 r}\left[(\mathbf{1}_z \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{N} \times \mathbf{n})\right] \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Le terme r/c tient compte du retard du signal électromagnétique. Connaissant la grandeur $\mathbf{H}$, il n'est pas difficile de calculer le flux d'énergie électromagnétique à travers un élément $dS = r^2 d\Omega$ de surface sphérique de rayon r vu du centre du système de charges sous l'angle solide $d\Omega$. Après cela, l'intensité de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, prise en valeur moyenne sur une période $T =$ $= 2\pi/\omega$, s'écrira :

$$dI = \frac{a^2 d_0^2 \omega^6}{2\pi c^5} \sin^2\theta \cos^2\psi \,(1 - \sin^2\theta \sin^2\psi)\, d\Omega.$$

387. En appliquant la même méthode de résolution que pour le problème 336, déterminons le moment magnétique et le tenseur de moment électrique quadrupolaire des dipôles tournants :

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{Rd\omega}{c}\mathbf{m}, \quad D_{\alpha\beta} = 6Rd \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\omega t \\ 0 & 0 & \sin\omega t \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{m} = \mathbf{1}_x \cos\omega t + \mathbf{1}_y \sin\omega t$. L'origine du système de coordonnées cartésiennes est choisie au centre de la circonférence et l'axe des Z est confondu avec l'axe de rotation.

D'après la formule (IV.14) l'intensité de champ magnétique s'exprime, dans ce problème, par les vecteurs

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{dR\omega^3}{c}\mathbf{m}, \quad \dddot{D} = 6Rd\omega^3\mathbf{N},$$

$$\mathbf{N} = \cos\theta\,(\mathbf{1}_x \sin\omega t' - \mathbf{1}_y \cos\omega t') + \mathbf{1}_z \sin\theta \sin(\omega t' - \psi),$$

tandis que les variables sont prises à l'instant retardé $t' = t - r/c$. Les notations introduites permettent de simplifier l'expression donnant l'intensité de champ magnétique dans la zone d'onde

$$\mathbf{H} = \frac{Rd\omega^3}{c^3 r}\left[(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{N} \times \mathbf{n})\right].$$

En prenant la moyenne temporelle de la distribution de l'intensité de rayonnement (IV.22), on obtient finalement

$$dI = \frac{R^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2\theta\,(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega.$$

388. $dI = \frac{a^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2\theta\,(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega.$

389. Plaçons l'origine des coordonnées au voisinage des dipôles. Désignons par $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du dipôle extrême. Alors, la dis-

position du m-ième dipôle se décrira par le rayon vecteur $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_0 + m\mathbf{a}$, où $m = 0, 1, \ldots, N - 1$. La distance du m-ième dipôle au point d'observation de rayon vecteur $\mathbf{r}$ est $R_m = r - \mathbf{n}\mathbf{r}_m$ où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. L'intensité de champ magnétique de l'onde émise

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2}{c^2 r}\,\mathbf{n} \times \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{d}\left(t - \frac{R_m}{c}\right)$$

contient le moment électrique dipolaire du système compte tenu du retard. La somme d'indice m qui apparaît est calculée à l'aide de la formule de la progression géométrique

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{d}\left(t - \frac{R_m}{c}\right) = \mathbf{d}_0 \operatorname{Re}\left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \mathbf{kr}_m)}\right) =$$

$$= \mathbf{d}_0 \cos\left(\omega t - \mathbf{kr} + \mathbf{kr}_0 + \frac{N-1}{2}\mathbf{ka}\right) \frac{\sin\frac{N\mathbf{ka}}{2}}{\sin\frac{\mathbf{ka}}{2}},$$

où $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ est le vecteur d'onde de l'onde sphérique divergente. L'intensité de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, prise en valeur moyenne sur une période T, est

$$dI = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} \frac{\sin^2\frac{N\omega\mathbf{na}}{2c}}{\sin^2\frac{\omega\mathbf{na}}{2c}} (\mathbf{d}_0 \times \mathbf{n})^2\, d\Omega.$$

390. Pour les dipôles représentés sur la fig. 5, l'intensité de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$, prise en valeur moyenne sur une période T, est de la forme

$$dI = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3} \frac{\sin^2\left(\frac{5\cos\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)} \sin^2\theta\, d\Omega.$$

Le rayonnement est maximal sous l'angle $\theta = \pi/2$ et présente une symétrie axiale par rapport à l'axe des Z.

Dans le cas des dipôles disposés sur l'axe des X (fig. 6), la répartition angulaire de l'intensité de rayonnement, prise en valeur moyenne sur une période T, se décrit par la formule

$$dI = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3} \frac{\sin^2\left(\frac{5}{2}\sin\theta\cos\psi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\psi\right)} \sin^2\theta\, d\Omega,$$

où θ et ψ sont les angles polaires du point d'observation. Le rayonnement présente son maximum dans la direction perpendiculaire au plan XZ.

§ 5. Polarisation des ondes émises

391. Dans la zone d'onde, les intensités des champs électrique et magnétique de l'onde émise sont de la forme

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

Ici, r est la distance du centre de la circonférence au point d'observation, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ et $\ddot{\mathbf{d}}$ est la dérivée seconde du moment électrique dipolaire de la charge

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\omega^2 R \mathbf{n}'.$$

Le vecteur unité $\mathbf{n}'$ est orienté suivant le rayon vecteur de la charge

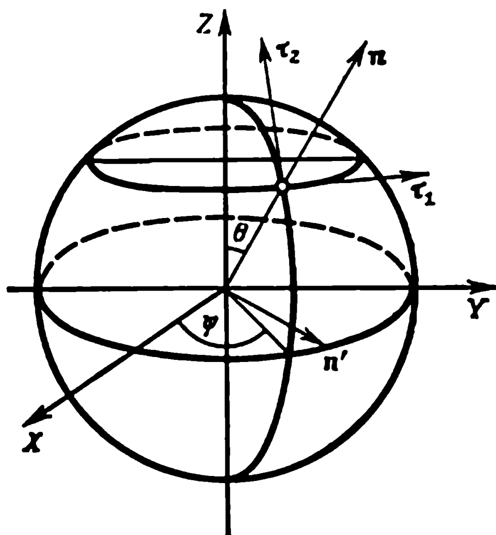


Fig. 11

(fig. 11). Les composantes des vecteurs unités $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ sont :

$$n_x = \sin\theta \cos\psi, \quad n_y = \sin\theta \sin\psi, \quad n_z = \cos\theta,$$

$$n'_x = \cos\omega t', \quad n_y = \sin\omega t', \quad n'_z = 0,$$

où $t' = t - r/c$ est le temps au point d'observation, compte tenu du retard, θ et ψ sont les angles polaires et l'axe des Z est dirigé le long du vecteur $\boldsymbol{\omega}$. Introduisons deux vecteurs unitaires de base $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ dans un plan perpendiculaire à la direction $\mathbf{n}$ de pro-

pagation de l'onde émise

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\mathbf{1}_z \times \mathbf{n}}{\sin\theta}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{1}_z \times \mathbf{n})}{\sin\theta}.$$

Décomposons les vecteurs **H** et **E** suivant ces vecteurs unitaires

$$\mathbf{H} = H_{\tau_1}\boldsymbol{\tau}_1 + H_{\tau_2}\boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{E} = E_{\tau_1}\boldsymbol{\tau}_1 + E_{\tau_2}\boldsymbol{\tau}_2.$$

Les projections des intensités des champs sur les vecteurs unitaires $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ se déterminent par les expressions

$$H_{\tau_1} = \mathbf{H}\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}\cos\theta\cos(\omega t' - \psi),$$

$$H_{\tau_2} = \mathbf{H}\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}\sin(\omega t' - \psi),$$

$$E_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad E_{\tau_2} = -H_{\tau_1}.$$

En tout point de la zone d'onde, pour $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, les vecteurs **H** et **E** tournent dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on regarde dans le sens de propagation de l'onde (rotation à droite). Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$, la rotation est à gauche. Les extrémités des vecteurs **H** et **E** décrivent des ellipses

$$\frac{H_{\tau_1}^2}{a^2} + \frac{H_{\tau_2}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{E_{\tau_1}^2}{b^2} + \frac{E_{\tau_2}^2}{a^2} = 1$$

de demi-axes a et b égaux à

$$a = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}|\cos\theta|, \quad b = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}.$$

On dit qu'une telle onde a une polarisation elliptique droite pour $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ et une polarisation elliptique gauche pour $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$. Le rapport des longueurs des demi-axes $\frac{a}{b} = |\cos\theta|$ dépend de la direction de rayonnement. En particulier, si l'onde émise se propage le long du champ magnétique $\theta = 0$ (ou $\theta = \pi$), elle est polarisée circulairement, alors qu'en cas de propagation sous un angle droit $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle est polarisée rectilignement.

392. Le rayonnement est polarisé suivant une ellipse dont le rapport des longueurs des demi-axes est égal à $|\cos\theta|$ où θ est l'angle entre la normale au plan de rotation du moment magnétique et la direction du point d'observation. Si l'onde émise se propage le long de l'axe de rotation du moment magnétique, l'ellipse se transforme en circonférence. La polarisation de l'onde est droite pour les angles $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ et gauche pour $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$. L'onde qui se propage

sous l'angle droit par rapport à l'axe de rotation du moment magnétique est polarisée rectilignement.

393. L'électron tourne suivant une circonférence de rayon $R = \frac{mcv}{|e|H_0}$ avec une fréquence $\omega = \frac{|e|H_0}{mc}$. Choisissons l'axe des Z dans le sens du champ magnétique extérieur (v. fig. 11). La dérivée troisième par rapport au temps du tenseur de moment électrique quadrupolaire est

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = -12e\omega^3R^2 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'intensité de champ magnétique de l'onde émise s'exprime par le vecteur

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta = 12e\omega^3 \sin\theta \cdot l_\alpha.$$

où on a noté

$$\mathbf{l} = \mathbf{1}_x \sin(2\omega t' - \psi) - \mathbf{1}_y \cos(2\omega t' - \psi).$$

Ici, $t' = t - \frac{r}{c}$ est le temps au point d'observation compte tenu du retard et θ et ψ sont les angles polaires qui fixent l'orientation du vecteur unité $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ de composantes

$$n_x = \sin\theta\cos\psi, \quad n_y = \sin\theta\sin\psi, \quad n_z = \cos\theta.$$

Dans la zone d'onde, à une grande distance r du centre de la circonférence, les intensités des champs magnétique et électrique de l'onde émise sont de la forme

$$\mathbf{H} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r}\sin\theta\,(\mathbf{l}\times\mathbf{n}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{H}\times\mathbf{n}.$$

Introduisons deux vecteurs unitaires de base

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\mathbf{1}_z\times\mathbf{n}}{\sin\theta}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{1}_z\times\mathbf{n})}{\sin\theta}$$

situés dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. La décomposition des vecteurs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$ suivant les vecteurs unitaires $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ s'écrira

$$\mathbf{H} = H_{\tau_1}\boldsymbol{\tau}_1 + H_{\tau_2}\boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{E} = E_{\tau_1}\boldsymbol{\tau}_1 + E_{\tau_2}\boldsymbol{\tau}_2,$$

où

$$H_{\tau_1} = -\frac{2ev^2\omega}{c^3r}\sin\theta\cos\theta\sin(2\omega t' - 2\psi);$$

$$H_{\tau_2} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r}\sin\theta\cos(2\omega t' - 2\psi);$$

$$E_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad E_{\tau_2} = -H_{\tau_1}.$$

On voit que l'extrémité du vecteur **H** (et celle de **E**) décrit une ellipse dont le rapport des longueurs des demi-axes est égal à $|\cos\theta|$. Le rayonnement quadrupolaire électrique possède donc une polarisation elliptique qui est droite pour $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ et gauche pour $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$. Si l'onde émise se propage le long de l'axe de rotation de l'électron $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, l'ellipse se transforme en circonférence, alors que si l'onde se propage dans le sens transversal $\theta = \pi/2$, l'ellipse dégénère en tronçon de ligne et l'onde devient polarisée rectilignement.

394. Le rayonnement dipolaire électrique est polarisé rectilignement.

395. Le rayonnement dipolaire magnétique est polarisé rectilignement.

396. Le rayonnement quadrupolaire électrique est polarisé rectilignement.

397. $dI = \frac{Q^2R^4\omega^6\beta^2}{200\pi c^5}\sin^2 2\theta d\Omega$, $I = \frac{4Q^2R^4\omega^6\beta^2}{375c^5}$,

où $Q = \frac{4\pi}{3}a^2b\rho$, θ est l'angle entre l'axe de symétrie axiale de l'ellipsoïde de révolution et la direction du point d'observation. Les ondes émises sont polarisées rectilignement.

Indication. Voir la résolution du problème 347.

398. $dI = \frac{Q^2(a^2-b^2)^2\omega^6}{50\pi c^5}(1-\cos^4\theta)\,d\Omega$, $I = \frac{8Q^2(a^2-b^2)^2\omega^6}{125c^5}$.

Le rayonnement quadrupolaire électrique est polarisé suivant une ellipse dont le rapport des longueurs des demi-axes est égal à $|\cos\theta|$ où θ est l'angle entre la vitesse angulaire ω et la direction du point d'observation. La polarisation de l'onde est droite si l'angle θ est aigu et gauche pour $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$. Les ondes qui se propagent sous des angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont polarisées circulairement, alors que les ondes se propageant dans le sens perpendiculaire au vecteur vitesse angulaire sont polarisées rectilignement.

§ 6. Diffusion des ondes électromagnétiques

399. $d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta d\Omega$, où θ est l'angle polaire du point d'observation et l'axe des Z est dirigé suivant le vecteur polarisation de l'onde. La section efficace totale de diffusion est

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

400. Si le vecteur polarisation de l'onde est désigné par **l**, la section efficace de diffusion de l'onde polarisée rectilignement dans

l'angle solide $d\Omega$ s'écrira

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 \, d\Omega, \tag{1}$$

où le vecteur unité $\mathbf{n}$ est dirigé vers le point d'observation et a les composantes

$$n_x = \sin\theta \cos\psi, \quad n_y = \sin\theta \sin\psi, \quad n_z = \cos\theta.$$

Choisissons l'axe des Z dans le sens de propagation de l'onde et désignons l'angle azimutal du vecteur polarisation par ψ'. Alors, on obtient

$$(\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 = 1 - (\mathbf{ln})^2 = 1 - \sin^2\theta \cos^2(\psi - \psi').$$

Pour déterminer la section efficace de diffusion de l'onde non polarisée, il convient de prendre la valeur moyenne de l'expression (1) sur l'angle ψ'. Il vient

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\theta) \, d\Omega.$$

La section efficace totale de diffusion est

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

401. $dI = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} (1 + \cos^2\theta) \, d\Omega, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,$

où θ est l'angle entre les vecteurs d'onde des ondes incidente et diffusée.

402. $d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} (1 + \cos^2\theta) \, d\Omega,$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2},$$

où θ est l'angle entre les vecteurs d'onde des ondes incidente et diffusée et ω_0 est la fréquence atomique donnée par l'expression $\omega_0 = \sqrt{e^2/mR^3}$.

403. $d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \, d\Omega,$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2},$$

où θ est l'angle entre le vecteur polarisation de l'onde incidente et la direction du point d'observation. Les paramètres ω_0 et γ sont donnés par les formules

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

404. $d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\, d\Omega,$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2},$$

où θ est l'angle entre le vecteur polarisation de l'onde incidente et la direction du point d'observation. Les paramètres ω_0 et γ sont de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi\rho\,|e|}{m}}, \qquad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

405. $d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi}{b_1^2+b_2^2}\sin^2\theta\right) d\Omega,$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,$$

où θ et ψ sont les angles polaire et azimutal du point d'observation. L'axe polaire du système de coordonnées sphériques est choisi le long de la direction de propagation de l'onde incidente.

406. $\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\beta\mu\omega}{c^2}\right)^2 \sin^2\theta$, où θ est l'angle entre le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ et l'intensité du champ magnétique de l'onde incidente.

407. $d\sigma = \frac{\beta^2\omega^4}{c^4}\left(1 - \frac{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi}{b_1^2+b_2^2}\sin^2\theta\right) d\Omega,$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\beta^2\omega^4}{c^4},$$

où θ et ψ sont les angles polaire et azimutal du point d'observation. L'axe polaire du système de coordonnées sphériques est choisi suivant le vecteur d'onde de l'onde incidente.

408. Calculons d'abord la dérivée seconde par rapport au temps du moment électrique dipolaire $\mathbf{d}$ de l'atome en utilisant à cet effet l'équation du mouvement

$$J\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \mathbf{d}\times\mathbf{E} \tag{1}$$

et l'équation

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{d} \tag{2}$$

décrivant la rotation du vecteur $\mathbf{d}$ qui ne varie pas en valeur absolue. En dérivant par rapport au temps les deux membres de l'équation (2) et en utilisant l'équation (1), on obtient

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{d^2}{J}\mathbf{E} - \frac{(\mathbf{dE})}{J}\mathbf{d},$$

où, en vertu de l'inégalité $dE_0/J \gg \Omega^2$, les petits termes sont omis. Prenons la moyenne temporelle de l'intensité de rayonnement sur

une période $T = 2\pi/\omega$ des oscillations de l'onde incidente

$$I = \frac{2d^2}{3c^3J^2}\,[d^2E^2 - (\mathbf{d}\mathbf{E})^2].$$

Après cela, la section efficace totale de diffusion (IV.28) s'écrira

$$\sigma = \frac{8\pi d^4}{3c^4J^2}\left(1 - \frac{(\mathbf{d}\mathbf{E}_0)^2}{d^2E_0^2}\right).$$

En prenant la valeur moyenne de cette expression sur la direction du vecteur **d**, on obtient en définitive

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{1}{4\pi}\int \sigma\, d\Omega_{\mathbf{d}} = \frac{16\pi d^4}{9c^4J^2}.$$

§ 7. Rayonnement des sources étendues

409. Dans la zone d'onde, le potentiel vecteur du champ électromagnétique produit par le courant donné est de la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV', \qquad (1)$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ et l'origine des coordonnées est choisie à l'intérieur du système rayonnant. La distance r au point d'observation est grande par rapport à la dimension linéaire maximale du volume parcouru par le courant.

L'intensité du champ magnétique produit par ce courant dans la zone d'onde est

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}.$$

L'intégrale cherchée s'exprime par la différence entre les valeurs du potentiel vecteur prises pour $t = \infty$ et $t = -\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\, dt = \frac{1}{c}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, \infty) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, -\infty)] \times \mathbf{n}.$$

Pour chaque point d'observation fixe de rayon vecteur **r** le temps de retard $\frac{1}{c}(r - \mathbf{n}\mathbf{r}')$ prend des valeurs finies parce que le domaine d'intégration dans l'intégrale (1) est limité. C'est pourquoi la quantité $t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}$ tend vers $\pm\infty$ quand le temps tend vers l'infini $t \to \pm\infty$. On en déduit que la fonction sous le signe de l'intégrale (1) devient identiquement nulle lorsqu'on introduit $t = \infty$ ou $t = -\infty$, si le courant ne circule pas en dehors de l'intervalle de t_1 à t_2.

Dans le cas où la densité volumique **j** du courant donné est constante en dehors de l'intervalle de t_1 à t_2, les fonctions vectorielles $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty)$ et $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty)$ satisfont à la condition de conti-

nuité des lignes de courant

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty)\, dV' = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty)\, dV' = 0,$$

qui a été établie plus haut lors de la résolution du problème 144.

Par conséquent, d'après les hypothèses du problème, on a dans la zone d'onde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \infty) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, -\infty) = 0$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\, dt = 0. \qquad (2)$$

Pour l'onde polarisée rectilignement $\mathbf{H} = \mathbf{1}H(\mathbf{r}, t)$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}, t)\, dt$ exprime une surface dans le plan des variables H et t que nous appellerons surface de l'impulsion électromagnétique rayonnée. D'après le résultat obtenu (2), en tout point d'observation dans la zone d'onde, la surface de l'impulsion électromagnétique est nulle.

Si le vecteur $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ au point d'observation $\mathbf{r}$ tourne avec le temps dans un plan perpendiculaire à la direction $\mathbf{n}$ de propagation de l'onde, ce sont les surfaces $\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\mathbf{r}, t)\, dt$ et $\int_{-\infty}^{\infty} H_2(\mathbf{r}, t)\, dt$, où $H_1 = \mathbf{1}_1\mathbf{H}$ et $H_2 = \mathbf{1}_2\mathbf{H}$, qui deviennent nulles et les vecteurs unités $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{1}_2$ et $\mathbf{n}$ forment un trièdre direct. On développera des raisonnements analogues pour l'intensité du champ électrique.

410. A grande distance $r \gg kl^2$ du courant, l'égalité $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n}\mathbf{r}'$ est satisfaite de façon approchée et le potentiel vecteur (IV.8) prend la forme

$$\mathbf{A} = \frac{J_0\mathbf{1}_z}{cr} \int_{-l}^{l} \cos kz' \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + kz'\cos\theta\right] dz' =$$

$$= \frac{J_0\mathbf{1}_z}{\omega r}\left(\frac{\sin[kl(1-\cos\theta)]}{1-\cos\theta} + \frac{\sin[kl(1+\cos\theta)]}{1+\cos\theta}\right)\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

En se servant des formules trigonométriques, on peut mettre cette expression sous une forme beaucoup plus simple

$$\mathbf{A} = (-1)^m \frac{2J_0\mathbf{1}_z}{\omega r \sin^2\theta} \cos\frac{(2m+1)\pi\cos\theta}{2} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

L'intensité du champ magnétique de l'onde rayonnée est

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1}_z \times \mathbf{n}) \frac{(-1)^m 2J_0}{cr\sin^2\theta} \cos\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\cos\theta\right] \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Conformément à la formule générale (IV. 22), l'intensité de rayonnement dans un angle solide $d\Omega$, prise en moyenne temporelle sur une

période T, s'écrira

$$dI = \frac{J_0^2}{2\pi c \sin^2\theta} \cos^2 \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \cos\theta \right] d\Omega.$$

412. $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}_z}{cr} \left[J\left(t - \frac{r+l}{c} \right) - J\left(t - \frac{r-l}{c} \right) \right], \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$

413. Le potentiel vecteur (IV.8) dans le plan XY, à grande distance du courant, peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = (-1)^m \frac{2J_0 \mathbf{1}_z}{r\omega_m} e^{-\gamma t'} \sin \omega_m t'$$

où $t' = t - r/c$ est le temps au point d'observation, compte tenu du retard. En coordonnées cylindriques, l'intensité du champ magnétique ne comporte que la composante angulaire qui se décrit par la formule

$$H_\psi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = (-1)^m \frac{2J_0}{cr} e^{-\gamma t} \left[\cos \omega_m t' - \frac{\gamma}{\omega_m} \sin \omega_m t' \right],$$

où $t' \geqslant 0$ et $H_\psi = 0$ pour $t' < 0$. Les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ forment avec le rayon vecteur $\mathbf{r}$ du point d'observation un trièdre direct et, de ce fait,

$$E_z = -H_\psi, \; E_x = E_y = 0.$$

Pour représenter le champ électromagnétique rayonné par une superposition d'ondes monochromatiques, développons l'intensité du champ électrique en intégrale de Fourier

$$E_z(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega.$$

En effectuant le calcul direct, on obtient

$$E_z(\omega) = E_+(\omega) + iE_-(\omega),$$

$$E_+(\omega) = \frac{2E_0\omega^2\gamma}{(\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_-(\omega) = \frac{E_0\omega(\omega^2 - \omega_m^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_0 = (-1)^{m+1} \frac{2J_0}{cr}.$$

Ainsi, la décomposition de l'intensité du champ électrique de l'onde électromagnétique rayonnée en ondes monochromatiques est de la forme

$$E_z = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[E_+(\omega) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + E_-(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] d\omega.$$

L'égalité $H_\psi = -E_z$ permet d'obtenir une décomposition analogue pour l'intensité du champ magnétique.

414. $dI = \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2\theta \sin^2[kl(1-\cos\theta)]}{(1-\cos\theta)^2} d\Omega.$

415. $H_r = H_\theta = 0,$

$$H_\psi = (-1)^m \frac{2J_0 \sin(m\pi\cos\theta)}{cr\sin\theta} \frac{\sin\left[\frac{N}{2} ka \sin\theta\cos\psi\right]}{\sin\left[\frac{1}{2} ka \sin\theta\cos\psi\right]} \cos\omega \times$$

$$\times \left(t - \frac{r}{c} + \frac{N-1}{2c} a \sin\theta\cos\psi\right);$$

$$dI = \frac{J_0^2 \sin^2(kl\cos\theta)}{2\pi c \sin^2\theta} \frac{\sin^2\left[\frac{N}{2} ka \sin\theta\cos\psi\right]}{\sin^2\left[\frac{1}{2} ka \sin\theta\cos\psi\right]} d\Omega.$$

416.

$$dI = \frac{2i_0^2}{\pi\omega k} \frac{\sin^2(kl\cos\theta)\sin^2(kb\sin\theta\cos\psi)}{\sin^4\theta\cos^2\psi} d\Omega.$$

417.

$$dI = \frac{2\pi R^2 i_0^2}{c} \left(\frac{\sin\theta\sin[kl(1-\cos\theta)] J_0(kR\sin\theta)}{1-\cos\theta}\right)^2 d\Omega.$$

Ici, $J_0(a)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro dont l'argument est $a = kR\sin\theta$. Cette fonction est apparue par suite de l'intégration

$$\int_0^{2\pi} \cos[a\cos(\psi'-\psi)]\, d\psi' = 2\pi J_0(a).$$

Lors de la résolution de ce problème on a aussi utilisé l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sin[a\cos(\psi'-\psi)]\, d\psi' = 0.$$

418. A une distance suffisamment grande r des cônes, le potentiel vecteur du champ rayonné est donné par la formule

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{i}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dS' \qquad (1)$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ et $dS' = r'\sin\theta_0 d\psi' dr'$, alors que l'intégration se fait sur les surfaces latérales des cônes parcourues par un courant avec une densité superficielle

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') = \frac{J(r', t')}{2\pi r'\sin\theta_0} \boldsymbol{\tau}.$$

Le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ est dirigé suivant la génératrice des cônes. Avec des notations adoptées, les vecteurs figurant dans l'expression sous le signe de l'intégrale (1) sont de la forme

$$\mathbf{n} = (\mathbf{1}_x \cos\psi + \mathbf{1}_y \sin\psi)\sin\theta + \mathbf{1}_z \cos\theta,$$
$$\mathbf{r}' = r'\,[(\mathbf{1}_x \cos\psi' + \mathbf{1}_y \sin\psi')\sin\theta_0 \pm \mathbf{1}_z \cos\theta_0],$$
$$\boldsymbol{\tau} = \pm\frac{\mathbf{r}'}{r'},$$

où θ et ψ sont les coordonnées sphériques du point d'observation et les signes $+$ et $-$ correspondent aux surfaces latérales supérieure ($z' > 0$) et inférieure ($z' < 0$) respectivement.

Puisque la répartition du courant présente une symétrie axiale, le potentiel vecteur cherché est indépendant de l'angle ψ en coordonnées sphériques r, θ et ψ. Aussi, dans l'expression sous le signe de l'intégrale (1) peut-on poser $\psi = 0$. Alors l'intégrale par rapport à la variable ψ', comportant le facteur $\mathbf{1}_y \sin\psi'$, devient nulle.

Compte tenu des remarques faites, on obtient

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi c r}\int_0^b dr' \int_0^{2\pi} d\psi' \Big[J\Big(r',\ t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c}\cos\Phi\Big) \times$$
$$\times (\mathbf{1}_z \cos\theta_0 + \mathbf{1}_x \sin\theta_0 \cos\psi') +$$
$$+ J\Big(r',\ t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c}\cos\tilde{\Phi}\Big)(\mathbf{1}_z \cos\theta_0 - \mathbf{1}_x \sin\theta_0 \cos\psi')\Big] =$$
$$= \frac{1}{2\pi c r}\int_{-b}^{b} d\xi \int_0^{2\pi} d\psi' J\Big(|\xi|,\ t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c}\cos\Phi\Big) \times$$
$$\times (\mathbf{1}_z \cos\theta_0 + \mathbf{1}_x \sin\theta_0 \cos\psi'),$$

où l'on a introduit les notations $\cos\Phi = \sin\theta_0 \sin\theta \cos\psi' + \cos\theta_0 \cos\theta$, $\cos\Phi = \sin\theta_0 \sin\theta \cos\psi' - \cos\theta_0 \cos\theta$.

En étudiant l'expression donnant $\operatorname{rot}\mathbf{A}$, on peut se convaincre sans peine que le champ magnétique ne possède que la composante angulaire H_ψ. Les autres composantes du vecteur $\mathbf{H}$ sont nulles comme cela doit avoir lieu dans un problème à symétrie axiale. Finalement, on obtient

$$dI = \frac{1}{2(2\pi c)^3}\Big|\int_{-b}^{b} d\xi \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{\partial}{\partial t} J\Big(|\xi|,\ t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c}\cos\Phi\Big) \times$$
$$\times (\cos\theta_0 \sin\theta - \sin\theta_0 \cos\theta \cos\psi')\,\Big|^2 d\Omega;$$

$$dI = \frac{\sin^2\theta}{4\pi c^3}\Big[\int_{-b}^{b} \frac{\partial}{\partial t} J\Big(|\xi|,\ t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c}\cos\theta\Big)\,d\xi\Big]^2 d\Omega \quad \text{pour } \theta_0 \to 0;$$

$$dI = 0 \quad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

§ 8. Problèmes à résoudre sur calculateur électronique

419. $$\mathscr{E}_d=\mathscr{E}_0\int\limits_{\eta_0}^{\infty}\frac{\left(\frac{d\psi(\eta)}{d\eta}\right)^2 d\eta}{\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}\frac{1}{\eta^2}+\psi(\eta)}},\quad \mathscr{E}_0=\frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\frac{e^2}{a},$$

$$\psi(\eta)=2\left(1+\frac{1}{\eta}\right)e^{-2\eta},$$

où la quantité η_0 est la racine de l'équation

$$1-\frac{l^2}{a^2}\frac{1}{\eta_0^2}+\psi(\eta_0)=0.$$

La fig. 12 représente une courbe traduisant la variation du logarithme naturel ln $(\mathscr{E}_d/\mathscr{E}_0)$ en fonction du paramètre l/a. Le tableau 1

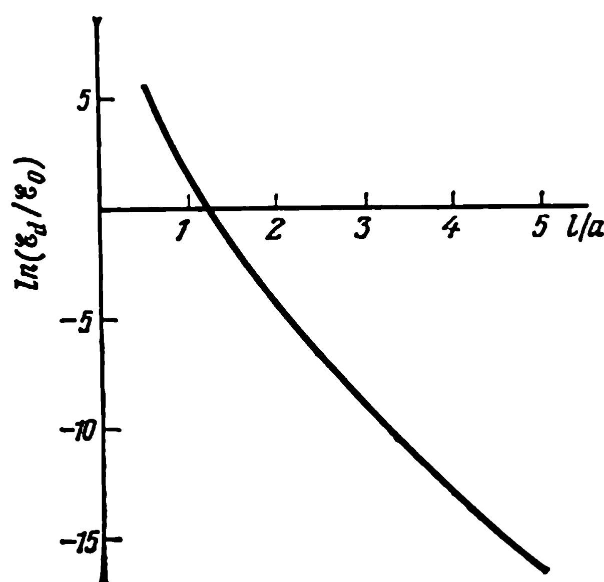


Fig. 12

ci-dessous donne une certaine idée de la variation de l'énergie totale du rayonnement dipolaire électrique en fonction du paramètre

Tableau 1

l/a	0,5	1	2	5
$\mathscr{E}_d/\mathscr{E}_0$	$3{,}36\cdot 10^2$	5.2	$1.23\cdot 10^{-2}$	$5{,}5\cdot 10^{-8}$

d'impact.

420.

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{\sqrt{x}} \int_0^\infty d\xi \int_{\eta_0(\xi)}^\infty d\eta \frac{\xi e^{-2\eta}}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x}}},$$

$$\varkappa_0 = \frac{4\pi a e^2 U_0}{3mc^3} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}, \quad x = \frac{\mathscr{E}_0}{U_0},$$

où la fonction $\eta_0 = \eta_0(\xi)$ est déterminée comme solution de l'équation

$$1 - \frac{\xi^2}{\eta_0^2} - \frac{e^{-\eta_0}}{x} = 0.$$

La variation de la quantité $\varkappa/\varkappa_0$ en fonction du paramètre $\mathscr{E}_0/U_0$ est représentée sur la fig. 13.

Indication. Pour le calcul sur calculateur électronique il est commode de passer de l'intégrale double à l'intégrale simple, en

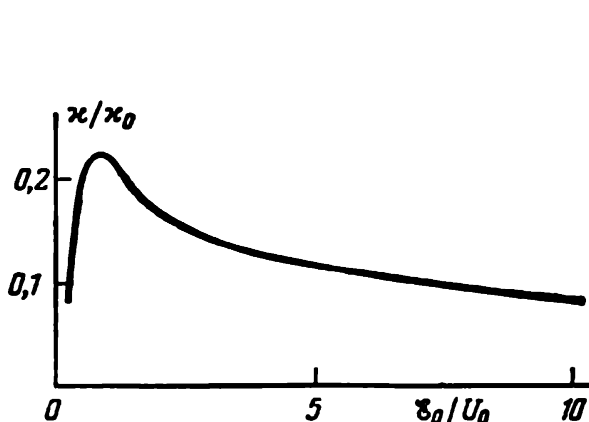


Fig. 13

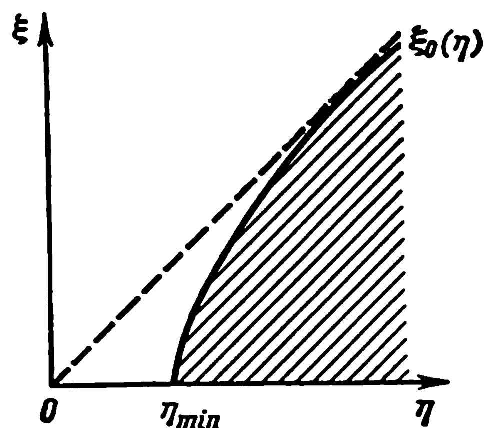


Fig. 14

intégrant d'abord par rapport à la variable ξ dans les limites de 0 à $\xi_0(\eta)$ et ensuite par rapport à η dans les limites de η_{min} à ∞. Dans le plan des variables η et ξ l'intégration est entendue sur la région hachurée sur la figure 14. Pour chaque valeur fixée de x la fonction $\xi_0(\eta)$ est déterminée comme solution de l'équation

$$1 - \frac{\xi_0^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x} = 0.$$

En calculant la valeur minimale η_{min} de la variable η, il convient de tenir compte de l'inégalité

$$1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x} \geqslant 0,$$

ce qui donne $\eta_{\min} = -\ln x$ pour $x < 1$ et $\eta_{\min} = 0$ pour $x \geqslant 1$. Finalement, on a

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{\sqrt{x}} \int_{\eta_{\min}}^{\infty} \eta^2 e^{-2\eta} \sqrt{1 - \frac{e^{-\eta}}{x}}\, d\eta.$$

L'expression asymptotique de la grandeur $\varkappa$ pour toutes valeurs de $x \gg 1$ est

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{4\sqrt{x}}.$$

421. $I = I_0 (f_1^2 + f_2^2)$, où

$$I_0 = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2 c^3 l^4},$$

$$f_1 = \frac{1}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\sin \frac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1+\xi^2)^{3/2}}\, d\xi,$$

$$f_2 = \frac{\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\xi \sin \frac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1+\xi^2)^{3/2}}\, d\xi,$$

$$\eta = \frac{vt}{l}.$$

Le graphique de la fig. 15 représente la variation de l'intensité

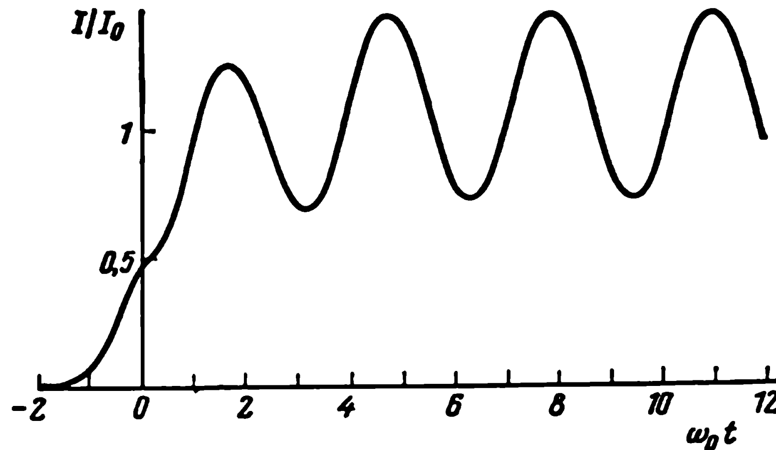


Fig. 15

relative I/I_0 du rayonnement de l'oscillateur en fonction de la variable η qui pour $v = \omega_0 l$, prend la valeur $\eta = \omega_0 t$.

422. $I = I_0 f^2$, où

$$I_0 = \frac{2e^2 F_0^2}{3m^2 c^3}.$$

$$f = e^{-\eta^2} - \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\frac{\gamma\tau}{2}(\xi-\eta)-\xi^2} \Big[\gamma\tau \cos\omega\tau(\eta-\xi) + \left(\omega\tau - \frac{\gamma^2\tau}{4\omega}\right)\sin\omega\tau(\eta-\xi)\Big]\, d\xi,$$

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{t}{\tau}, \quad \eta_0 = \frac{t_0}{\tau}.$$

L'intensité I de rayonnement de l'oscillateur en fonction de la variable t/τ pour $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$ est représentée pour les cas $t_0 = 0$

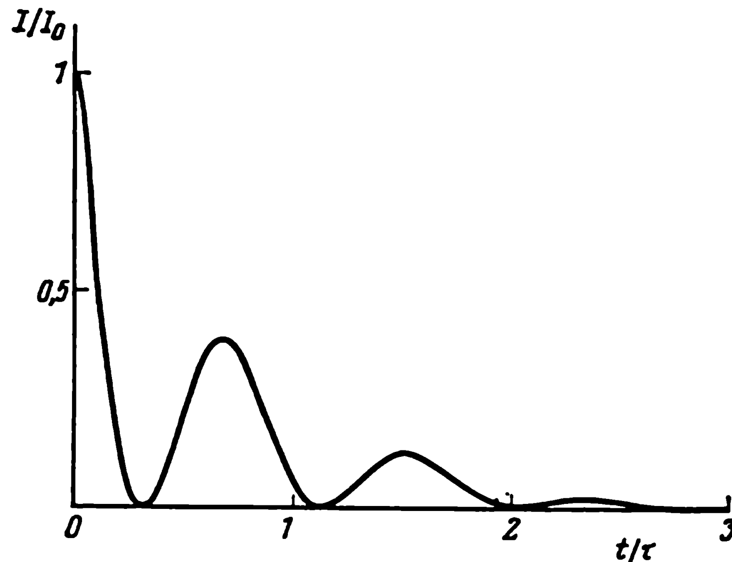


Fig. 16

et $t_0 = -\infty$ sur les fig. 16 et 17 respectivement.

423. $d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Q^2\beta^2\omega^4}{3\pi c^3 v^2 l^2}(f_1^2 + f_2^2)\, d\omega,$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\omega l}{v}\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}\, d\xi, \quad f_2 = \int_0^\infty \frac{\xi \sin\frac{\omega l}{v}\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}\, d\xi.$$

La composition spectrale du rayonnement est représentée sur la fig. 18. A l'unité en ordonnées correspond la quantité $\frac{8Q^2\beta^2 v^2}{3\pi c^3 l^6}$.

424. $\frac{d\mathscr{E}_\omega^c}{d\omega} = \frac{4e^2\mathscr{E}_0 A_1 A_2}{3\pi m c^3 (A_1 + A_2)}\left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2}\right)^2 F^2,$

$$F = 2\int_0^\infty \frac{\cos\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi + \operatorname{sh}\xi)\right]}{1 + \operatorname{ch}\xi}\, d\xi, \quad \omega_0 = \frac{2\mathscr{E}_0}{Z_1 Z_2 e^2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0 (A_1 + A_2)}{m A_1 A_2}};$$

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega^b}{d\omega}=\frac{4e^2\mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi mc^3(A_1+A_2)}\left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2(f_1^2+f_2^2),$$

$$f_1=\int_0^\infty\frac{\cos\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{1+\operatorname{ch}\xi}d\xi,\qquad f_2=\int_0^\infty\frac{\sin\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{1+\operatorname{ch}\xi}d\xi.$$

La composition spectrale du rayonnement est représentée sur la

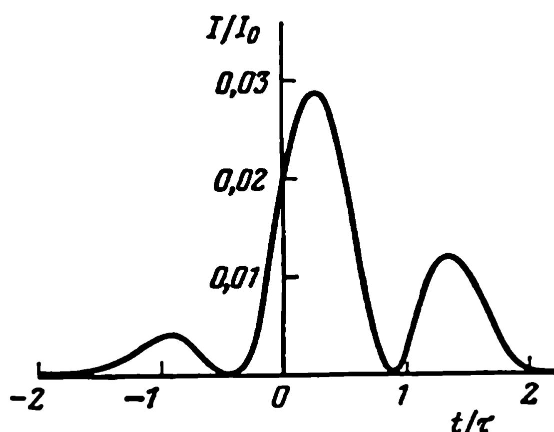


Fig. 17

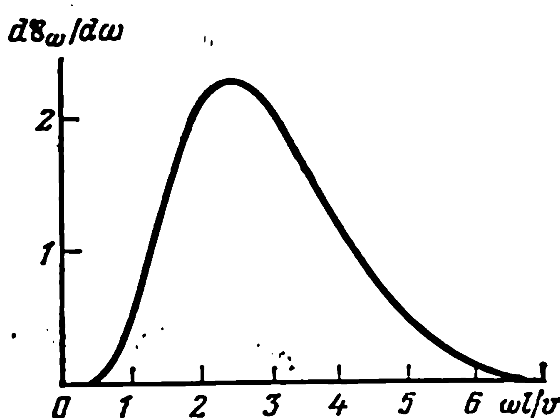


Fig. 18

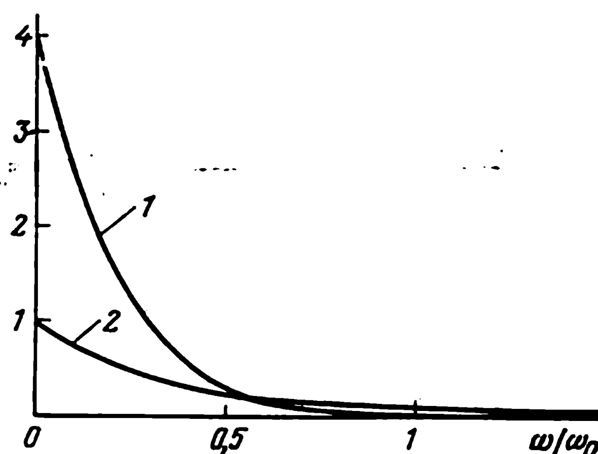


Fig. 19

fig. 19. Les courbes *1* et *2* correspondent aux cas *a* et *b* respectivement. A l'unité en ordonnées correspond la quantité

$$\frac{4e^2\mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi mc^3(A_1+A_2)}\left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2.$$

425. $$\frac{d\mathcal{E}_\omega^a}{d\omega}=\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2F^2,$$

$$F=2\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\xi\sin\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}d\xi,$$

$$\omega_0=\frac{2\mathscr{E}_0}{Z_1Z_2e^2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0(A_1+A_2)}{mA_1A_2}};$$

$$\frac{d\mathscr{E}^b_\omega}{d\omega}=\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2(f_1^2+f_2^2),$$

$$f_1=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi\sin\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}\,d\xi,$$

$$f_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi\cos\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}\,d\xi.$$

La composition spectrale de rayonnement est représentée sur la fig. 20. Les courbes *1* et *2* correspondent aux cas *a* et *b* respectivement.

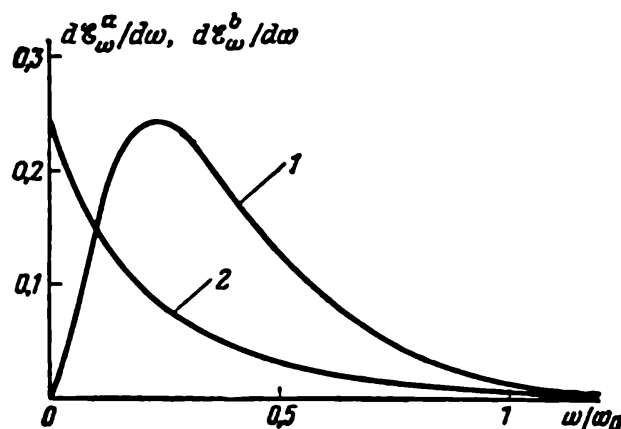


Fig. 20

A l'unité en ordonnées correspond la quantité

$$\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2.$$

426.

$$\mathscr{E}(\omega)=\frac{c\tau^2E_0^2}{(2\pi)^2}\left(\int_0^\infty e^{-\xi^4}\cos\left[(\omega-\omega_0)\tau\xi\right]d\xi\right)^2.$$

$$\Delta\omega=\frac{2x}{\tau},$$

où la quantité x est la racine de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-\xi^4}\left(1-\sqrt{2}\cos x\,\xi\right)d\xi=0.$$

La raie spectrale de rayonnement est représentée sur la fig. 21. A l'unité en ordonnées correspond la quantité $c\tau^2 E_0^2/(2\pi)^2$. La largeur de la raie spectrale $\Delta\omega = 2{,}8/\tau$.

427. $$\mathbf{E} = \mathbf{1}_z E_0 \int_{-1}^{1} \left(e^{-\left(t' - \frac{l - b\xi}{c\tau}\right)^6} - e^{-\left(t' + \frac{l + b\xi}{c\tau}\right)^6}\right) d\xi,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \qquad E_0 = \frac{bi_0}{cr},$$

$$t' = \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{r}{c}\right), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\mathscr{E}(\omega) = \frac{c\tau^2 E_0^2}{\pi^2} \left[\int_0^\infty d\eta \int_{-1}^{1} d\xi \left(e^{-(\xi - 1 + \eta)^6} - e^{-(\xi + 1 + \eta)^6}\right) \sin \omega\tau\eta \right]^2.$$

La courbe représentative de l'intensité du champ électrique et la raie spectrale de rayonnement sont montrées sur les fig. 22 et 23 respectivement. A l'unité en ordonnées de la fig. 23 correspond la quantité $c\tau^2 E_0^2/\pi^2$.

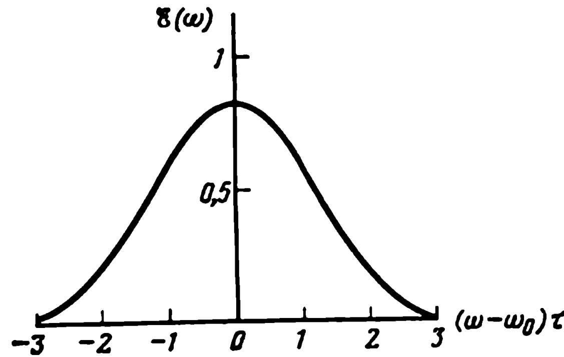


Fig. 21

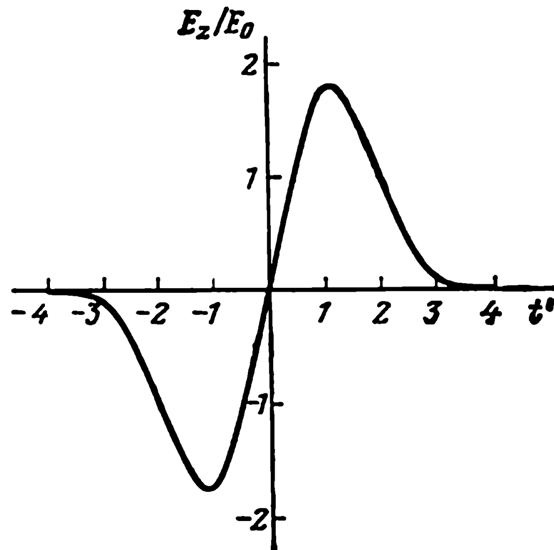


Fig. 22

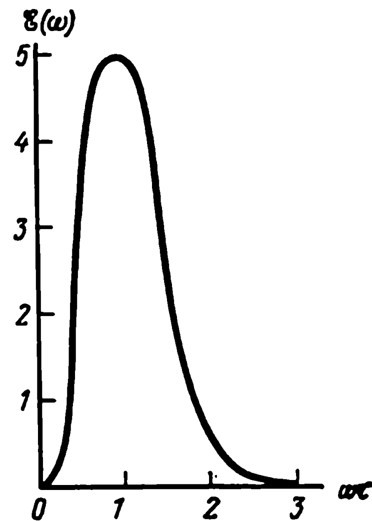


Fig. 23

428. $$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{2\pi R^4 j_0^2}{c}\,\frac{\sin^2\theta\sin^2[kh(1-\cos\theta)]}{(1-\cos\theta)^2}\times$$
$$\times\left(\int_0^1 e^{-\xi^3}J_0(kR\xi\sin\theta)\,\xi\,d\xi\right)^2.$$

Le diagramme directionnel de rayonnement est représenté pour le cas $h = R = 1/k$ sur la fig. 24. La direction du rayonnement maxi-

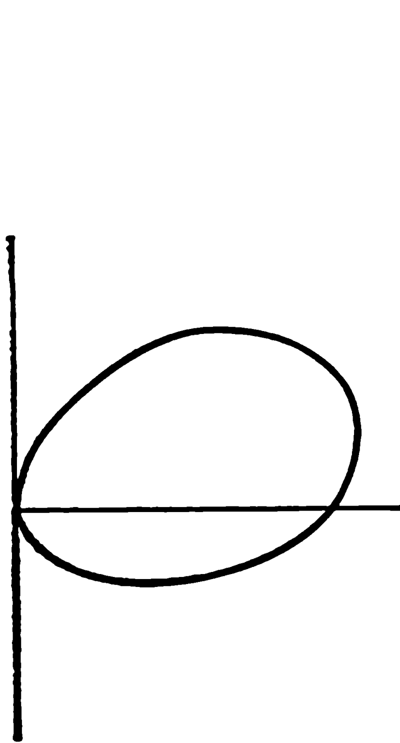


Fig. 24

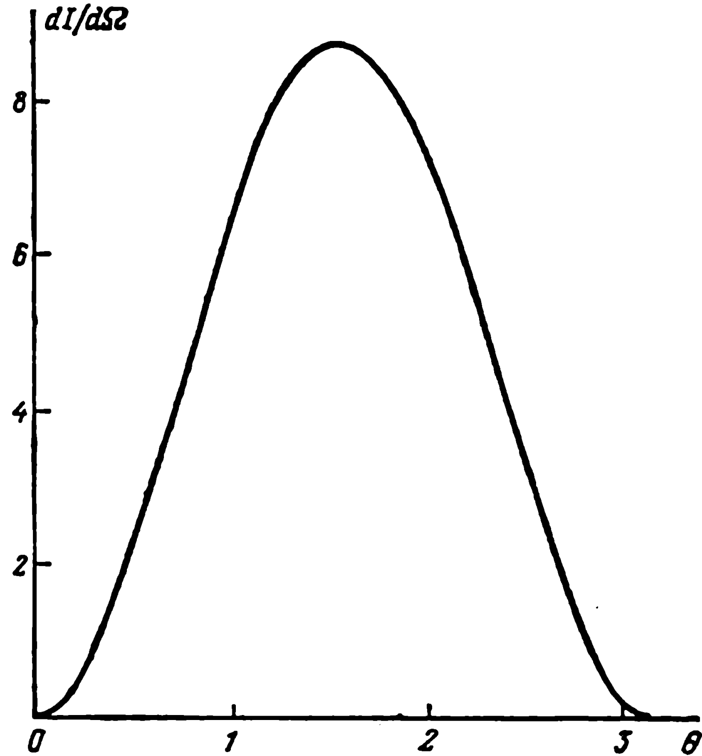


Fig. 25

mal $\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\max}=\frac{R^4 j_0^2}{2c}$ fait avec l'axe polaire l'angle $\theta_m = 73°$.

429.

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{J_0^2}{4\pi^3 c}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{\pi(\cos\theta+\sin\theta\cos\psi)}{2\sqrt{2}}}{1+\sin^2\theta\sin^2\psi-\sin 2\theta\cos\psi}(\sin\theta-\cos\theta\cos\psi)\,d\psi\right)^2.$$

La fig. 25 représente la variation de $dI/d\Omega$ en fonction de l'angle θ. A l'unité en ordonnées correspond la quantité $J_0^2/(4\pi^3 c)$. Le graphique est symétrique par rapport à la droite $\theta = \pi/2$.

430. Dans la zone d'onde où les intensités des champs électrique et magnétique décroissent en module inversement proportionnellement à la distance du point d'observation au centre du système rayonnant, la relation $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \mathbf{n}\mathbf{r}'$ est satisfaite et le potentiel

vecteur retardé (IV.8) prend la forme

$$A_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{l_\beta}{cr} \int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV'. \tag{1}$$

D'après ses indices α et β, l'intégrale obtenue est un tenseur symétrique de rang 2. Puisque l'expression sous le signe de cette intégrale contient un seul vecteur indépendant $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$, ce tenseur doit être de la forme

$$\int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV' = a\delta_{\alpha\beta} + bn_\alpha n_\beta, \tag{2}$$

où a et b sont des grandeurs scalaires.

Egalons les sommes diagonales des tenseurs figurant aux premier et second membres de l'égalité (2)

$$\int F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV' = 3a + b. \tag{3}$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (2) par l'expression $n_\alpha n_\beta$ et faisons la somme suivant les indices de tenseur qui se répètent

$$\int \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r}')^2}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV' = a + b. \tag{4}$$

En résolvant conjointement les équations algébriques (3) et (4), on trouve les grandeurs a et b par lesquelles s'exprime le potentiel vecteur (1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}[a\mathbf{l} + b(\mathbf{l}\mathbf{n})\mathbf{n}]. \tag{5}$$

En calculant le rotationnel du potentiel vecteur (5) dans la zone d'onde, on rejette les termes contenant le facteur $1/r^2$. On obtient

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{n}}{2c^2 r} \int \left(1 - \frac{(nr')^2}{r'^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV'.$$

Si on substitue à la fonction $F(r, t)$ l'expression donnée et on pose $c\tau = 10\lambda$ et $\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{r}{c}\right) = t'$, on trouve

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{\pi\lambda^3 j_0}{c^2 \tau r} \int_0^\infty d\xi \int_{-1}^{1} dx (1 - x^2) \times$$
$$\times \left[1 - t' + \frac{\xi}{10}(1 - x)\right] e^{-\left[\xi + t' - \frac{\xi}{10}(1-x)\right]}, \tag{6}$$

où l'intégration est étendue sur la surface hachurée de la fig. 26. Dans le domaine d'intégration est satisfaite la condition $t' \geqslant$

$\geqslant \xi(1-x)/10$ qui est consécutive au retard avec lequel les signaux électromagnétiques arrivent au point d'observation.

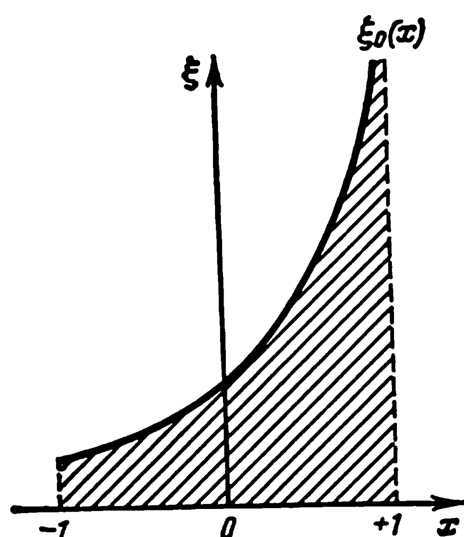


Fig. 26

En fixant une valeur de x, calculons l'intégrale (6) par rapport à la variable ξ dans les limites de 0 à $\xi_0(x) = 10t'/(1-x)$ (fig. 26). L'intégrale restante par rapport à la variable x

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{1} \times \mathbf{n}) \frac{10\pi\lambda^3 j_0}{c^2\tau r} \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{(x+9)^2} \times$$

$$\times \left[(10 - t'x - 9t') e^{-t'} - 10e^{-\frac{10t'}{1-x}}\right] dx$$

est calculée à l'aide des méthodes numériques.

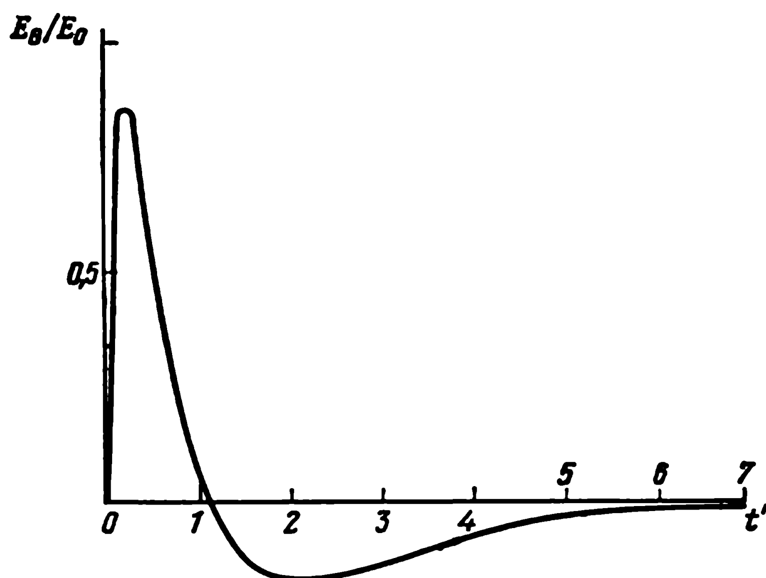


Fig. 27

Les intensités des champs électrique et magnétique dans la zone d'onde sont liées entre elles par la relation $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$ ou, en coordonnées sphériques,

$$\mathbf{E} = \mathbf{1}_\theta E_\theta, \quad \mathbf{H} = \mathbf{1}_\psi H_\psi, \quad E_\theta = H_\psi.$$

L'intensité E_θ du champ électrique du rayonnement en un certain point fixe de la zone d'onde est représentée sur la fig. 27. A l'unité en ordonnées correspond la quantité $E_0 = \pi\lambda^3 j_0 \sin\theta/c^2\tau r$.

CHAPITRE V

CHAMP PRODUIT PAR DES PARTICULES RELATIVISTES CHARGÉES

§ 1. Transformation de champ électromagnétique

431. Si on a trouvé un système de coordonnées K' dans lequel $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$, tout autre système de coordonnées K'' qui se déplace parallèlement aux vecteurs $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{H}'$ satisfait lui aussi à la condition imposée $\mathbf{E}''\parallel\mathbf{H}''$. Aussi, convient-il chercher un système de coordonnées possédant les propriétés indiquées parmi les systèmes qui se déplacent perpendiculairement aux vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. Lors du passage à de tels systèmes de coordonnées, les vecteurs intensités des champs électrique et magnétique tournent dans un plan perpendiculaire à la vitesse relative de ces systèmes, et les composantes des intensités parallèles à la vitesse relative n'apparaissent pas.

Choisissons le système de coordonnées initial de telle sorte que $E_x = H_x = 0$. Alors, le système de coordonnées cherché avec prime se déplace avec une certaine vitesse V suivant l'axe des X et les axes cartésiennes de mêmes noms des systèmes de coordonnées indiquées sont parallèles. Dans le système de coordonnées cherché on a $E'_x = H'_x$ et $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = 0$, ce qui donne

$$E'_y H'_z - H'_y E'_z = 0. \tag{1}$$

En utilisant les formules de transformation des champs (V.28) et (V.29), exprimons les composantes avec prime des vecteurs par celles sans prime. Après cela, la relation (1) se transformera en une équation du second degré par rapport à la grandeur V/c:

$$\left(\frac{V}{c}\right)^2 - \frac{E^2+H^2}{|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|}\frac{V}{c} + 1 = 0,$$

où V est la projection de la vitesse cherchée sur l'axe des X. De deux racines de cette équation, choisissons celle qui satisfait à la condition $\left|\frac{V}{c}\right| < 1$. La deuxième racine répond à une inégalité de sens opposé parce que le produit des racines est égal à l'unité. On a finalement

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \left(E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{EH})^2}\right)\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{2(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^2}.$$

Si $\mathbf{EH} < 0$, les vecteurs $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{H}'$ sont antiparallèles dans le système de coordonnées trouvé.

432. a) Soit $E > H$, alors, en vertu des invariants du champ électromagnétique (V.32), il existe un système galiléen K' tel que seul le champ électrique est non nul $\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{H}' = 0$. Dans ce système de coordonnées avec prime, la vitesse **V** se situe dans un plan perpendiculaire au vecteur **H** parce que la composante du vecteur intensité du champ magnétique, parallèle au vecteur **V**, ne change pas lors du passage au système de référence indiqué $\mathbf{HV} = \mathbf{H}'\mathbf{V} = 0$. Les vecteurs **V** et **E** forment entre eux un certain angle α.

Par souci de commodité, choisissons les sens des vecteurs **V** et **H** comme axes des X et Z dans le système de coordonnées initial. Alors, le système de coordonnées cherché K' se déplace avec une vitesse **V** suivant l'axe des X, et les axes cartésiens de mêmes noms de ces deux systèmes de coordonnées sont parallèles. Dans le système de coordonnées K' le champ magnétique est nul:

$$H'_x = H'_y = 0, \quad H'_z = \frac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

où $H_z = H$ et $E_y = E \sin\alpha$. On en déduit

$$\frac{V}{c} = \frac{H}{E \sin\alpha}, \quad \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})}{(\mathbf{n}\times\mathbf{E})^2}\mathbf{n}.$$

Ici, **n** est le vecteur unité situé dans un plan perpendiculaire à l'intensité **H** du champ magnétique. La condition $\frac{V}{c} < 1$, impose des limitations des directions possibles de **n** par rapport au vecteur **E**:

$$\sin\alpha > \frac{H}{E}, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}.$$

A l'aide des formules (V.28) on trouve

$$\mathbf{E}' = \mathbf{n}(\mathbf{En}) + \frac{\mathbf{H}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{H}\times\mathbf{n}|}\sqrt{(\mathbf{E}\times\mathbf{n})^2 - H^2}$$

b) Si $E < H$, il existe un système de coordonnées dans lequel seul le champ magnétique est non nul. En reprenant les raisonnements qui précèdent, on obtient

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})}{(\mathbf{n}\times\mathbf{H})^2}\mathbf{n}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{n}(\mathbf{Hn}) - \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{E}\times\mathbf{n}|}\sqrt{(\mathbf{H}\times\mathbf{n})^2 - E^2},$$

où **n** est un vecteur unité situé dans un plan perpendiculaire à l'intensité **E** du champ électrique. La condition $\frac{V}{c} < 1$ restreint les valeurs possibles de l'angle α entre les vecteurs **V** et **H**:

$$|\sin\alpha| > \frac{E}{H}, \quad \mathbf{H}\times\mathbf{n} \parallel \mathbf{E},$$

433. $\frac{\mathbf{V}}{c}=\frac{2((\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathbf{n})\,\mathbf{n}}{(\mathbf{E}\times\mathbf{n})^2+(\mathbf{H}\times\mathbf{n})^2}$, où **n** est un vecteur unité arbitairement orienté.

434. $\mathbf{V}=\pm\frac{c}{N}\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{j}|}$.

436. $E'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E^2-H^2+\sqrt{(E^2-H^2)^2+8(\mathbf{EH})^2}\right)^{1/2}$,

$$H'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(H^2-E^2+\sqrt{(H^2-E^2)^2+8(\mathbf{HE})^2}\right)^{1/2}.$$

437. Dans le système de coordonnées lié au noyau on a

$$\mathbf{E}=\frac{Q\mathbf{r}}{r^3},\quad \mathbf{H}=0.$$

Dans le système de coordonnées galiléen avec prime où, à l'instant donné, le neutron est au repos, l'intensité du champ magnétique se détermine facilement avec la précision indiquée, à l'aide des formules de transformation (V.31):

$$\mathbf{H}'=-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{E}).$$

Par conséquent, la force subie par le neutron s'écrira

$$\mathbf{F}'=\mathrm{grad}'\,(\mu\mathbf{H}')$$

A cette même approximation, les composantes de la force à quatre dimensions $f_i'=(\mathbf{f}', f_4')$ sont

$$\mathbf{f}'=\left.\frac{\mathbf{F}'}{c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right|_{\mathbf{v}'=0}=\frac{\mathbf{F}'}{c},\qquad f_4'=\left.\frac{\mathbf{v}'\mathbf{F}'}{c^2\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right|_{\mathbf{v}'=0}=0,$$

où l'on pose que la vitesse **v'** du neutron dans le système de coordonnées avec prime est nulle. En se servant des formules de transformation du quadrivecteur et en négligeant les petits termes proportionnels à v^2/c^2, on détermine les composantes spatiales de la force à quatre dimensions $f_i=(\mathbf{f}, f_4)$ dans le système de coordonnées initial

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}'=\frac{1}{c}\,\mathrm{grad}'\,(\mu\mathbf{H}').$$

Si l'on néglige les termes d'ordre v^2/c^2, on a $\mathbf{f}=\frac{1}{c}\mathbf{F}$, et les composantes des rayons vecteurs **r** et **r'** sont liées entre elles par la transformation galiléenne. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z},$$

ce qui permet d'écrire en définitive

$$\mathbf{F}=\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu}}{c}\,\mathbf{E}\right)=\frac{Q}{c}\left(\frac{\mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu}}{r^3}-3\,\frac{(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{r}}{r^5}\,\mathbf{r}\right).$$

Il est facile de voir que par rapport à un champ électrique extérieur le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ d'une particule en mouvement est équivalent à un dipôle électrique de moment $\mathbf{d}=\frac{\mathbf{v}\times\boldsymbol{\mu}}{c}$.

438. $\mathbf{F}=\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{d}\times\mathbf{v}}{c}\,\mathbf{H}\right)=\left(\frac{\mathbf{d}\times\mathbf{v}}{c}\operatorname{grad}\right)\mathbf{H}$. De l'expression de la force on déduit que par rapport à un champ magnétique extérieur le dipôle électrique $\mathbf{d}$ en mouvement est équivalent à un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}=\frac{\mathbf{d}\times\mathbf{v}}{c}$.

439. Indication. Utiliser la loi de transformation de tenseurs (V.9) et la matrice (V.5) de transformation de Lorentz.

441. $$\omega=\omega'\,\frac{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad \cos\theta=\frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'},$$

où ω et θ sont respectivement la fréquence de l'onde électromagnétique et l'angle entre le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la vitesse $\mathbf{V}$ de mouvement du système de coordonnées galiléen avec prime par rapport au système fixe, en conformité avec les notations adoptées dans les formules (V.3) à (V.6). Le signe ′ indique les grandeurs analogues dans le système de référence en mouvement. Dans le cas $V\ll c$, on a

$$\omega=\omega'\left(1+\frac{V}{c}\cos\theta'\right)=\omega'+\mathbf{k}'\mathbf{V}\quad \text{pour}\quad \frac{V}{c}\ll|\cos\theta'|,$$

$$\omega=\omega'\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)\qquad \text{pour}\quad \theta'=\frac{\pi}{2},$$

$$\theta'-\theta=\frac{V}{c}\sin\theta.$$

442. Dans le système de coordonnées avec prime, lié au miroir en mouvement, les lois de la réflexion des ondes électromagnétiques conduisent aux égalités $k'_{1x}=-k'_{2x}$ et $\omega'_1=\omega'_2$, où l'axe des X' est dirigé le long du vecteur vitesse $\mathbf{V}$ du miroir, et les axes cartésiens de mêmes noms des systèmes au repos et en mouvement sont parallèles. En utilisant les formules de transformation de Lorentz, exprimons dans ces deux égalités les composantes avec prime des quadrivecteurs d'onde $k'_{1l}=\left(\mathbf{k}'_1,\,i\frac{\omega'_1}{c}\right)$ et $k'_{2l}=\left(\mathbf{k}'_2,\,i\frac{\omega'_2}{c}\right)$ par leurs composantes dans le système de coordonnées fixe. Il en résulte deux équations algébriques par rapport aux grandeurs cherchées. La ré-

solution de ces équations fournit la réponse aux questions posées

$$\cos\theta_2 = \frac{2\beta+(1+\beta^2)\cos\theta_1}{1+\beta^2+2\beta\cos\theta_1},$$

$$\omega_2 = \omega_1\,\frac{1+\beta^2+2\beta\cos\theta_1}{1-\beta^2},$$

où on a noté $\beta = V/c$.

443. $w = w_0\left(\frac{c+V}{c-V}\right)^2, \qquad \mathbf{g} = \frac{w\mathbf{V}}{cV}.$

I n d i c a t i o n. Passer au système de coordonnées lié au miroir en mouvement et utiliser la loi de la réflexion de l'onde électromagnétique sur une surface plane fixe pour déterminer les paramètres de l'onde réfléchie. Après avoir déterminé l'onde réfléchie dans le système de coordonnées en mouvement, revenir au système de coordonnées en mouvement, revenir au système de coordonnées initial, en se servant à cet effet des formules de transformation (V.28) à (V.31) des intensités des champs électrique et magnétique de l'onde réfléchie.

444. $$w' = w\,\frac{\left(1-\frac{V}{c}\cos\alpha\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

445. $$\mathbf{F} = \frac{a^2E_0^2}{8}\,\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\,\frac{\mathbf{k}}{k}.$$

§ 2. Rayonnement d'une charge animée d'un mouvement rapide

446. $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) =$

$$= \frac{e}{cr}\left(\mathbf{v}+(\mathbf{nv})\frac{\mathbf{v}}{c}+(\mathbf{nr}_e)\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c}+2(\mathbf{nr}_e)(\mathbf{nv})\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2}+\right.$$

$$\left.+(\mathbf{nr}_e)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})\frac{\mathbf{v}}{c^2}+(\mathbf{nv})^2\frac{\mathbf{v}}{c^2}+\frac{1}{2}(\mathbf{nr}_e)^2\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{c^2}\right).$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}).$$

Ici, le rayon vecteur $\mathbf{r}_e$ et la vitesse $\mathbf{v}$ de la charge sont pris à l'instant $t - r/c$ où r est la distance entre un point fixe à l'intérieur de la région de mouvement de la charge et le point d'observation ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$).

447. La réponse est donnée par les formules (V.44) et (V.45).

I n d i c a t i o n. Puisque les potentiels de Liénard-Wichert dépendent explicitement de l'instant de temps retardé t', il est néces-

saire de calculer au préalable les dérivées de cette grandeur par rapport aux variables x, y, z et t. A cet effet, on dérive les deux membres de l'égalité $R(t') = c(t - t')$ par rapport au temps d'observation t:

$$\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right). \tag{1}$$

La quantité $\partial R/\partial t'$ est déterminée en dérivant l'identité $R^2 = \mathbf{R}^2$ compte tenu de la relation $\partial \mathbf{R}(t')/\partial t' = -\mathbf{v}(t')$, ce qui donne

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}. \tag{2}$$

En introduisant l'expression (2) dans la formule (1), on obtient une égalité utile

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{Rc}}. \tag{3}$$

D'une manière analogue, on calcule grad t' en dérivant les deux membres de l'égalité $R(t') = c(t - t')$ par rapport aux coordonnées x, y et z du point d'observation

$$\operatorname{grad} R(t') = -c \operatorname{grad} t'. \tag{4}$$

D'autre part, en considérant la grandeur $R(t')$ comme étant égale à la distance entre deux points $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$, on peut écrire

$$\operatorname{grad} R(t') = \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{\partial R}{\partial t'} \operatorname{grad} t'. \tag{5}$$

En égalant entre eux les seconds membres des égalités (4) et (5), on trouve encore une relation nécessaire

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}. \tag{6}$$

Les formules (3) et (6) ainsi obtenues facilitent le calcul des intensités des champs (V.44) et (V.45).

448. La réponse est fournie par les formules (V.48) et (V.49).

449. $I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}\frac{1 + \frac{1}{5}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4}$. Dans le cas ultrarelativiste on a

$$I = \frac{4e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{5c^3}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4}.$$

Pour $v^2 \ll c^2$, on a

$$I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}\left(1 + \frac{21}{5}\frac{v^2}{c^2}\right),$$

où le carré de l'accélération $\dot{\mathbf{v}}^2$ contient aussi les petits termes d'ordre v^2/c^2. Par exemple, dans le cas où la charge e se déplace dans un champ électrique uniforme et constant d'intensité **E**, la dernière formule prend la forme

$$I=\frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}\left(1+\frac{6}{5}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

450. L'énergie de la particule est dépensée pour le rayonnement $-d\mathscr{E}_{\mathrm{n}}=d\mathscr{E}_{\mathrm{ray}}$. En se servant des formules (V.51) et (V.51), on trouve la perte d'énergie de la particule pendant le temps dt' :

$$-d\mathscr{E}_{\mathrm{n}}=\frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{2c^3}dt'\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{\left(1-\frac{v}{c}x\right)^5}dx.$$

Cette intégrale doit être prise deux fois, par parties, en dérivant chaque fois le numérateur de l'expression sous le signe de l'intégrale

$$-d\mathscr{E}_{\mathrm{n}}=\frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}dt'.$$

En se servant de l'équation du mouvement (V.17) ainsi que des formules (V.16) et (V.18), on détermine le carré de l'accélération de la particule dont la vitesse est parallèle au vecteur **E** :

$$\dot{\mathbf{v}}^2=\frac{e^2E^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3.$$

Après cela, la vitesse de perte d'énergie de la particule par rayonnement, calculée à partir des formules (V.48) et (V.51), prend la forme

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{n}}}{dt'}\right)_{\mathrm{ray}}=\frac{2e^4E^2}{3m^2c^3},$$

ce qui coïncide avec l'expression obtenue à partir d'une autre formule (V.58) valable pour une particule chargée qui se déplace parallèlement à l'intensité d'un champ électrique.

451. L'intensité de rayonnement est

$$I=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

où $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$ est la vitesse de l'électron à l'instant t. Choisissons les axes des X et Y le long des vecteurs **E** et **v** (0). Alors, on a

$$\frac{E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2[(mc^2)^2+c^2p_y^2],$$

où p_y est la projection de l'impulsion de l'électron sur la direction de sa vitesse initiale v (0).

Puisque l'énergie rayonnée est petite par rapport à l'énergie cinétique, l'influence réciproque du champ de rayonnement sur le mouvement de l'électron peut être négligée. D'après l'équation du mouvement (V.17) la grandeur p_y conserve dans ce cas une valeur constante déterminée par la condition initiale et on peut donc écrire

$$(mc^2)^2 + c^2 p_y^2 = \mathscr{E}_0^2.$$

Par conséquent, l'intensité de rayonnement de l'électron est constante et l'énergie rayonnée est donc proportionnelle au temps

$$\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{2e^4 E^2 \mathscr{E}_0^2}{3m^4 c^7} t.$$

452. $\mathscr{E}_{\text{ray}} = \dfrac{4\,|e|^3 v_0 E}{3mc^2 \sqrt{c^2 - v_0^2}}.$

453. $\mathscr{E}_{\text{ray}} = \dfrac{2e^3 \varphi}{3m^2 c^4 l} \left(\sqrt{(e\varphi + \mathscr{E}_0)^2 - (mc^2)^2} - cp_0\right),$

où on a noté

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad p_0 = \mathscr{E}_0 \frac{v_0}{c^2}.$$

454. a)
$$\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{\pi e^3 v_0^2 H}{mc^4 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}};$$

b)
$$\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{\pi e^3 v_0^2 H}{3mc^4 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

où l'on suppose que l'énergie rayonnée est négligeable par rapport à l'énergie cinétique de la particule.

455. L'énergie $\mathscr{E}$ de l'électron étant dépensée pour le rayonnement, on peut écrire

$$-d\mathscr{E} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^5} \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \qquad (1)$$

où v est la valeur absolue de la vitesse de l'électron. En utilisant la formule (V.12), exprimons la vitesse par l'énergie $\mathscr{E}$. Après cela la relation (1) s'écrira

$$\frac{d\mathscr{E}}{(mc^2)^2 - \mathscr{E}^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^4 c^7} dt. \qquad (2)$$

En intégrant les deux membres de l'égalité (2) compte tenu des conditions initiales, on obtient

$$\text{Ar th} \frac{\mathscr{E}}{mc^2} - \text{Ar th} \frac{\mathscr{E}_0}{mc^2} = \frac{2e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}.$$

Utilisons une formule trigonométrique connue

$$\operatorname{th}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{th}\alpha-\operatorname{th}\beta}{1-\operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\beta}$$

et représentons l'énergie comme fonction explicite du temps

$$\mathscr{E}=mc^2\frac{\mathscr{E}_0+mc^2\operatorname{th}\frac{2e^4H^2t}{3m^3c^5}}{mc^2+\mathscr{E}_0\operatorname{th}\frac{2e^4H^2t}{3m^3c^5}}.$$

Dans le cas d'une faible vitesse initiale $v_0^2\ll c^2$, on a

$$\mathscr{E}=mc^2+\frac{mv_0^2}{2}e^{-\frac{4e^4H^2t}{3m^3c^5}}.$$

456. $I=\frac{8e^2J^2v^2}{3m^2c^7r^2}\left(e\pm\frac{d}{r}\right)^2$, où les signes $+$ et $-$ correspondent à deux sens du moment électrique dipolaire; vers le courant et dans le sens opposé.

457. L'énergie rayonnée totale est

$$\mathscr{E}_{\text{ray}}=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{E})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}dt,$$

où $\mathbf{E}=\frac{Z|e|\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r}$ étant le rayon vecteur de l'électron et $\mathbf{v}\approx\mathbf{v}_0$.

Supposons que la trajectoire de l'électron est parallèle à l'axe des X et traverse l'axe des Y à l'instant $t=0$ (v. fig. 10). Dans ce cas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{E})^2\right]dt=\frac{2Z^2e^2}{v_0}\left[\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^4}+\frac{l^2v_0^2}{c^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^6}\right],$$

où $r^2=l^2+x^2$. La première intégrale se calcule directement

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^4}=\frac{\pi}{4l^3}. \qquad (1)$$

La deuxième intégrale, dont l'expression sous le signe somme contient au dénominateur des termes de degré plus élevé, se calcule par dérivation des deux membres de l'égalité (1) par rapport au paramètre l. Finalement, on obtient

$$\mathscr{E}_{\text{ray}}=\frac{\pi}{12}\frac{Z^2e^6}{m^2l^3v_0c^3}\frac{4c^2-v_0^2}{c^2-v_0^2}.$$

458. a) $\mathscr{E}_{\text{ray}}=\frac{\pi}{4}\frac{e^4d^2}{m^2l^5v_0c(c^2-v_0^2)}$;

b) $\mathscr{E}_{\text{ray}}=\frac{3\pi}{8}\frac{e^4d^2}{m^2l^5v_0c(c^2-v_0^2)}\left(1-\frac{3}{8}\frac{v_0^2}{c^2}\right)$.

459. $P_{\text{ray}} = \frac{\pi}{8} \frac{e^4 d^2}{m^2 l^6 c^3 (c^2 - v_0^2)} \left(7 - \frac{15}{8} \frac{v_0^2}{c^2}\right).$

460. a) $\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{\pi}{4} \frac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^6 c^3 (c^2 - v_0^2)};$

b) $\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{15\pi}{64} \frac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^6 c^3 (c^2 - v_0^2)}.$

461. $P_{\text{ray}} = \frac{41\pi}{64} \cdot \frac{e^4 \mu^2 v_0^2}{m^2 l^8 c^6 (c^2 - v_0^2)}.$

462. $\mathscr{E}_{\text{ray}} = \frac{4\pi e^4 J^2 v}{3m^2 c^5 l (c^2 - v^2)}.$

463. $\frac{1}{\mathscr{E}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \frac{2e^4 E^2 t}{3m^4 c^7}.$

464. $\frac{1}{\mathscr{E}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \frac{2e^4 H_\perp^2 t}{3m^4 c^7}$, où $\mathbf{H}_\perp$ est la composante du vecteur $\mathbf{H}$, perpendiculaire à la vitesse de la particule ultrarelativiste.

465. En se servant des formules (V.12) et (V.16) à (V.18), on obtient

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}))}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathbf{vF}}{m} = \frac{\dot{\mathscr{E}}}{m} = \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Composons la différence des carrés des grandeurs (1) et (2). Après avoir élevé au carré la somme (1) effectuons une permutation circulaire des facteurs et tenons compte du fait que les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}$ sont orthogonaux. Une transformation ultérieure de la somme totale ainsi obtenue donne

$$\frac{1}{m^2}\left[\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{vF})^2\right] = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}.$$

Finalement,

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{n}}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}.$$

Cette relation peut aussi être obtenue par une autre voie, en exprimant au préalable le second membre de l'égalité initiale (V.58) par le carré de l'accélération à quatre dimensions (V.21)

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{n}}}{dt} = \frac{2e^2 c}{3} w_i^2.$$

En trouvant le carré de l'accélération à quatre dimensions, on se ramène à la relation cherchée.

466. $d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right) d\omega.$

467. Développons l'exponentielle en série et gardons les trois premiers termes

$$\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e}{c}} = \dot{\mathbf{r}}_e - \frac{i\omega}{c}\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{n}\mathbf{r}_e) + \frac{(i\omega)^2}{2c^2}\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{n}\mathbf{r}_e)^2.$$

Utilisons la relation

$$2\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{n}\mathbf{r}_e) = (\mathbf{r}_e \times \dot{\mathbf{r}}_e) \times \mathbf{n} + \frac{d}{dt}\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_e\mathbf{n})$$

et écrivons la somme obtenue avec les nouvelles notations

$$e\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e}{c}} = \dot{\mathbf{d}} - i\omega(\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{n}) - \frac{i\omega}{6c}\dot{\mathbf{D}} + \frac{e}{2}\left(\frac{i\omega}{c}\right)^2(\mathbf{n}\mathbf{r}_e)^2\mathbf{v} - \frac{i\omega e}{3c}(\mathbf{r}_e\dot{\mathbf{r}}_e)\,\mathbf{n},$$

où $D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\beta$, μ est moment magnétique et $D_{\alpha\beta}$ le tenseur de moment électrique quadrupolaire de la charge.

Supposons que les composantes de Fourier $f(\omega)$ et $\dot{f}(\omega)$ de chaque fonction $f(t)$ considérée ici et de sa dérivée $\dot{f}(t)$ vérifient la relation

$$-i\omega f(\omega) = \dot{f}(\omega).$$

Alors, à l'approximation donnée, la formule de départ (V.60) prendra la forme

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2c^3}\Big|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)\times\mathbf{n} + (\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \frac{1}{6c}\dddot{\mathbf{D}}(\omega)\times\mathbf{n} + \mathbf{Q}(\omega)\times\mathbf{n}\Big|^2 d\Omega\,d\omega,$$

où l'on a noté

$$\mathbf{Q}(\omega) = \frac{e}{2c^2}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)^3(\mathbf{n}\mathbf{r}_e)^2\mathbf{v}e^{i\omega t}\,dt.$$

Après l'intégration par rapport aux angles on trouve la composition spectrale du rayonnement compte tenu des termes d'ordre v^2/c^2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \Big\{\frac{2|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5} + \frac{e}{15\pi c^5}\Big[\ddot{\mathbf{d}}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\frac{d^3}{dt^3}[2r_e^2\mathbf{v} - (\mathbf{r}_e\mathbf{v})\,\mathbf{r}_e]\,dt + \ddot{\mathbf{d}}^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\frac{d^3}{dt^3}[2r_e^2\mathbf{v} - (\mathbf{r}_e\mathbf{v})\,\mathbf{r}_e]\,dt\Big]\Big\}\,d\omega.$$

Si on intègre par rapport à la fréquence ω, on obtient l'énergie rayonnée totale

$$\mathcal{E}_{\text{ray}} = \int_{-\infty}^{\infty} I\,dt,$$

où l'intensité de rayonnement est de la forme

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{180c^5} + \frac{2e}{15c^5}\,\ddot{\mathbf{d}}\,\frac{d^3}{dt^3}\,[2r_e^2\mathbf{v} - (\mathbf{r}_e\mathbf{v})\,\mathbf{r}_e].$$

468. Dans la formule générale (V.64), posons

$$\mathbf{r}_e\,(t) = \mathbf{1}_z a \cos\omega_0 t,\quad \mathbf{n}\mathbf{r}_e\,(t) = a\cos\theta\cos\omega_0 t,\quad \omega_0 t = \varphi,$$

où θ est l'angle entre l'axe des Z et la direction de rayonnement. Après cela, la moyenne temporelle de l'intensité de rayonnement dans l'élément d'angle solide sur le n-ième harmonique s'écrira

$$dI = \frac{n^2e^2a^2\omega_0^4}{2\pi c^3}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{na\omega_0}{c}\cos\theta\cos\varphi\right)}\sin\varphi\,d\varphi\right|^2 \sin^2\theta\,d\Omega.$$

Représentons l'intégrale qui est apparue dans cette expression par la somme de deux intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\cos\varphi)}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{i}{2\pi x}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\cos\varphi)} i\,(n + x\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{n}{2\pi x}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\cos\varphi)}\,d\varphi.$$

La première intégrale est nulle parce que la fonction sous le signe somme est une fonction périodique de période 2π, et la deuxième s'exprime par la fonction de Bessel d'ordre n entier :

$$J_n\,(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi + x\cos\varphi)}\,d\varphi.$$

Finalement, on trouve

$$dI_n = \frac{n^2e^2\omega_0^2}{2\pi c}\,\operatorname{tg}^2\theta\, J_0^2\left(\frac{n\omega_0 a}{c}\cos\theta\right)d\Omega.$$

469. Choisissons les axes des X et Y dans le plan de la circonférence et amenons l'axe des Z en coïncidence avec l'axe de rotation. Les composantes du rayon vecteur de la charge et du vecteur unité indiquant la direction de rayonnement s'écriront :

$$x_e = R\cos\omega_0 t,\quad y_e = R\sin\omega_0 t,\quad z_e = 0,$$

$$n_1 = \sin\theta\cos\psi,\quad n_2 = \sin\theta\sin\psi,\quad n_3 = \cos\theta.$$

Du fait que l'intensité de rayonnement dans un élément d'angle solide est prise en moyenne temporelle, elle a dans le problème considéré une symétrie axiale et est indépendante de l'angle ψ. Aussi, pour simplifier les relations qui peuvent apparaître, posons dès le début $\psi = 0$ dans la formule de départ (V.64). En tenant compte de

$$\mathbf{n} \times \mathbf{r}_e(t) = -R\omega_0 (\mathbf{1}_x \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{1}_y \cos\theta \sin\varphi - \\ - \mathbf{1}_z \sin\theta \cos\varphi),$$

$$\mathbf{n}\mathbf{r}_e(t) = R \sin\theta \cos\varphi, \quad \varphi = \omega_0 t,$$

on obtient pour la moyenne temporelle de l'intensité de rayonnement dans un élément d'angle solide sur le n-ième harmonique l'expression suivante

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 R^2 \omega_0^4}{2\pi c^3} \left(\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{nv}{c} \sin\theta\cos\varphi\right)} \cos\varphi \, d\varphi \right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{nv}{c} \sin\theta\cos\varphi\right)} \sin\varphi \, d\varphi \right|^2 \cos^2\theta \right) d\Omega. \qquad (1)$$

Utilisons la représentation intégrale de la fonction de Bessel d'ordre entier n. Alors, la première des intégrales intervenant au second membre de l'égalité (1) s'exprimera par la dérivée de la fonction de Bessel, et la deuxième par la fonction de Bessel elle-même comme dans le problème précédent. Après des calculs assez simples, on trouve

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 v^2}{2\pi R^2 c} \left[\operatorname{ctg}^2\theta J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \sin\theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \sin\theta \right) \right] d\Omega.$$

470.

$$dI_n = \frac{n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \operatorname{tg}^2\theta \left[e_1 J_n \left(\frac{n a_1 \omega_0}{c} \cos\theta \right) + e_2 J_n \left(\frac{n a_2 \omega_0}{c} \cos\theta \right) \right]^2 d\Omega.$$

où θ est l'angle entre l'axe des Z et la direction de rayonnement.

471. $\mathscr{E}_{\text{lim}} = 4 \left(\frac{m^2 c^4 l}{Qe^2} \right)^2 \frac{l}{\pi}$.

472. $\mathscr{E}_{\text{lim}} = 4 \left(\frac{m^2 c^4 l^2}{e^2 \mu} \right)^2 \frac{l}{\pi}$.

473. $\mathscr{E}_{\text{lim}} = \frac{64}{15} \left(\frac{m^2 c^4 l^2}{e^2 d} \right)^2 \frac{l}{\pi}$.

474. $\mathscr{E}_{\text{lim}} = \frac{3}{4} \left(\frac{m^2 c^4}{e^2 q} \right)^2 \frac{l}{\pi}$.

475. $\mathscr{E}_{\text{lim}} = \frac{3}{4} \left(\frac{m^2 c^5}{e^2 J} \right)^2 \frac{l}{\pi}$.

ANNEXES

Annexe 1

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Produits scalaire et vectoriel de deux vecteurs:

$$\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha = AB \cos(\widehat{\mathbf{AB}}), \qquad (A1.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\mathbf{1}_x + \\ + (A_z B_x - A_x B_z)\,\mathbf{1}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\,\mathbf{1}_z. \qquad (A1.2)$$

$$|\,\mathbf{A} \times \mathbf{B}\,| = AB \sin(\widehat{\mathbf{AB}}). \qquad (A1.3)$$

Produit vectoriel mixte et double produit vectoriel de vecteurs:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, \qquad (A1.4)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \qquad (A1.5)$$

Opérateur différentiel nabla :

$$\nabla = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \qquad (A1.6)$$

Opérateur de Laplace (laplacien):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (A1.7)$$

Gradient d'une fonction φ :

$$\operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{1}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (A1.8)$$

Relations intégrales comportant le gradient d'une fonction :

$$\oint_S \varphi \, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{grad} \varphi \, dV, \qquad \text{(A1.9)}$$

où S est une surface fermée qui limite le volume V;

$$\oint_L \varphi d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \varphi) \, dS, \qquad \text{(A1.10)}$$

où S est une surface quelconque sustendue par le contour fermé L. La normale $\mathbf{n}$ à cette surface est orientée dans le sens d'avancement de la vis normale quand elle tourne dans le sens de parcours du contour L.

Dérivée d'une fonction scalaire φ dans le sens du vecteur unitaire $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi. \qquad \text{(A1.11)}$$

Dérivée d'un vecteur $\mathbf{B}$ dans le sens du vecteur unitaire $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{n} \operatorname{grad}) \, \mathbf{B} \equiv (\mathbf{n} \nabla) \, \mathbf{B}. \qquad \text{(A1.12)}$$

Dérivée d'un vecteur $\mathbf{B}$ dans le sens d'un vecteur $\mathbf{A}$, multipliée par le module $|\mathbf{A}|$ de ce vecteur

$$(\mathbf{A} \operatorname{grad}) \, \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \nabla) \, \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \qquad \text{(A1.13)}$$

Divergence d'un vecteur $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad \text{(A1.14)}$$

Théorème d'Ostrogradsky-Gauss

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV, \qquad \text{(A1.15)}$$

où S est une surface fermée qui limite le volume V.

Rotationnel d'un vecteur $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{1}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{1}_z \qquad \text{(A1.16)}$$

Théorème de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\mathbf{S}, \tag{A1.17}$$

où S est une surface quelconque sustendue par le contour fermé L. La normale à cette surface est orientée dans le sens d'avancement de la vis normale quand elle tourne dans le sens de parcours du contour L.

Relations intégrales fréquemment utilisées:

$$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A})\, dS = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dV, \tag{A1.18}$$

$$\oint_S \operatorname{grad} \varphi\, d\mathbf{S} = \int_V \nabla^2 \varphi\, dV, \tag{A1.19}$$

où S est une surface fermée qui limite le volume V et $\mathbf{n}$ une normale extérieure à cette surface.

Formules de Green:

$$\oint_S \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\mathbf{S} = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi)\, dV, \tag{A1.20}$$

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \tag{A1.21}$$

où S est une surface fermée qui limite le volume V et $\mathbf{n}$ une normale extérieure à cette surface.

Rotationnel d'un gradient:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \tag{A1.22}$$

Rotationnel d'un rotationnel:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \tag{A1.23}$$

Divergence d'un rotationnel:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \tag{A1.24}$$

Divergence d'un gradient:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi. \tag{A1.25}$$

Dérivées de produits:

$$\operatorname{grad} (\varphi \Phi) = \varphi \operatorname{grad} \Phi + \Phi \operatorname{grad} \varphi, \tag{A1.26}$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{AB}) = (\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{A1.27}$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi, \tag{A1.28}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \tag{A1.29}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}, \tag{A1.30}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\operatorname{grad})\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}. \tag{A1.31}$$

Dérivées de certaines fonctions composées:

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = -\operatorname{grad}'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{A1.32}$$

$$\operatorname{grad}F(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi, \tag{A1.33}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\varphi) = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi, \tag{A1.34}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\varphi) = \operatorname{grad}\varphi\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\varphi}, \tag{A1.35}$$

$$(\mathbf{A}\operatorname{grad})\mathbf{B}(\varphi) = (\mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\varphi}. \tag{A1.36}$$

Expressions du gradient, de la divergence, du rotationnel et du laplacien en coordonnées cylindriques:

$$x = r\cos\psi,\quad y = r\sin\psi,\quad z = z,$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\mathbf{1}_\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{1}_z, \tag{A1.37}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{A1.38}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right)\mathbf{1}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{1}_\psi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)\mathbf{1}_z, \tag{A1.39}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{A1.40}$$

$$\nabla^2 F(r) = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right), \tag{A1.41}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\right)\mathbf{1}_r + \left(\nabla^2 A_\psi - \frac{A_\psi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)\mathbf{1}_\psi + \nabla^2 A_z\mathbf{1}_z. \tag{A1.42}$$

Expressions du gradient, de la divergence, du rotationnel et du laplacien en coordonnées sphériques:

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\mathbf{1}_\psi, \tag{A1.43}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} \tag{A1.44}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right]\mathbf{1}_r + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\psi)\right]\mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{1}_\psi. \tag{A1.45}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}, \tag{A1.46}$$

$$\nabla^2F(r) = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rF), \tag{A1.47}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \\ = \left\{\nabla^2A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\right]\right\}\mathbf{1}_r + \\ + \left[\nabla^2A_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\right)\right]\mathbf{1}_\theta + \\ + \left[\nabla^2A_\psi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\psi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\psi} - \frac{A_\psi}{2\sin\theta}\right)\right]\mathbf{1}_\psi. \tag{A1.48}$$

Annexe 2

MATRICES ET TENSEURS

L'ensemble des nombres $a_{\alpha\beta}$ représentés sous forme d'un tableau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{a} \tag{A2.1}$$

est appelé matrice $\hat{a}$, alors que les nombres $a_{\alpha\beta}$ eux-mêmes s'appellent éléments de matrice. Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée matrice carrée.

La somme de deux matrices $\hat{a}$ et $\hat{b}$ est une matrice $\hat{c}$

$$\hat{c} = \hat{a} + \hat{b} \tag{A2.2}$$

dont les éléments sont les sommes des éléments de même nom des matrices à additionner:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}. \tag{A2.3}$$

Le produit $\hat{a}\hat{b}$ de deux matrices $\hat{a}$ et $\hat{b}$ est une matrice $\hat{c}$ dont les éléments sont définis par la formule

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}. \tag{A2.4}$$

En général, $\hat{a}\hat{b} \neq \hat{b}\hat{a}$. Si $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$, les matrices sont dites commutables ou permutables. Quant au facteur c commun à tous les éléments de matrice, on peut le faire sortir de sous le signe de matrice:

$$\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{A2.5}$$

Les éléments d'une matrice unité

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A2.6}$$

sont désignés par le symbole de Kronecker:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{A2.7}$$

La matrice initiale $\hat{a}$ ne change pas lorsqu'elle est multipliée par une matrice unité $\hat{a}\hat{I} = \hat{I}\hat{a} = \hat{a}$.

Si le déterminant d'une matrice $\hat{a}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\hat{a}| \tag{A2.8}$$

est non nul, il existe une matrice inverse $\hat{a}^{-1}$ telle que

$$\hat{a}^{-1}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{-1} = \hat{I}, \tag{A2.9}$$

$$a^{-1}_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = a_{\alpha\gamma} a^{-1}_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{A2.10}$$

Les éléments de la matrice inverse $\hat{a}^{-1}$ sont de la forme

$$a^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{|\hat{a}|}, \tag{A2.11}$$

où $A_{\beta\alpha}$ est le cofacteur (complément algébrique) de l'élément $a_{\beta\alpha}$ dans le déterminant de la matrice donnée (A2.8).

La transposée $\hat{a}^T$ d'une matrice donnée $\hat{a}$ est obtenue en permutant les lignes et les colonnes de la matrice initiale

$$a^T_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{A2.12}$$

Une matrice symétrique $\hat{s}$ et une matrice antisymétrique $\hat{a}$ jouissent des propriétés :

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \tag{A2.13}$$

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}. \tag{A2.14}$$

Une matrice carrée arbitraire $\hat{b}$ peut être représentée par la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$\hat{b} = \frac{1}{2}(\hat{b}+\hat{b}^T) + \frac{1}{2}(\hat{b}-\hat{b}^T) \tag{A2.15}$$

ou encore

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta}+b_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta}-b_{\beta\alpha}). \tag{A2.16}$$

Une matrice diagonale est définie par l'expression

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{A2.17}$$

Dans un espace euclidien à trois dimensions, les composantes x_1, x_2 et x_3 du rayon vecteur se transforment, lors d'un changement de coordonnées XYZ en coordonnées $X'Y'Z'$ tournées selon la formule :

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta}x_\beta, \tag{A2.18}$$

où x'_1, x'_2 et x'_3 sont les composantes du même rayon vecteur dans le système de coordonnées tournées alors que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont les cosinus des angles entre le β-ième axe du système de coordonnées données et le α-ième axe du système de coordonnées tournées. L'ensemble des coefficients $a_{\alpha\beta}$ constitue une matrice de transformation linéaire orthogonale de coordonnées lors du passage d'un système de coordonnées données à un système de coordonnées tournées. Le passage inverse se réalise à l'aide de la matrice inverse (A2.11).

La transformation linéaire de coordonnées de la forme (A2.18) est dite orthogonale si la matrice $a_{\alpha\beta}$ de cette transformation satisfait à la condition $a^{-1}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Comme exemple de transformation linéaire orthogonale on peut indiquer le changement d'un système de coordonnées cartésiennes en un autre système quelconque de coordonnées tournées.

On appelle vecteur A_β l'ensemble de trois grandeurs A_1, A_2 et A_3 qui se transforment, lors d'un changement orthogonal de coor-

données, comme les composantes du rayon vecteur *)

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta, \tag{A2.19}$$

où les trois grandeurs A'_1, A'_2 et A'_3 sont des composantes du même rayon vecteur dans le système de coordonnées affectées de prime.

On appelle tenseur du deuxième rang (on dit aussi tenseur de valence 2 ou d'ordre 2) l'ensemble de neuf grandeurs $T_{\gamma\delta}$ qui se transforment, lors d'un changement orthogonal de coordonnées, comme le produit des composantes du rayon vecteur

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta}, \tag{A2.20}$$

où $T'_{\alpha\beta}$ sont des composantes du même tenseur dans le système de coordonnées affectées de prime.

On définit de façon analogue un tenseur de rang n dont les grandeurs $T_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ possèdent n indices. En particulier, pour $n = 3$, on a

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\sigma} a_{\gamma\rho} T_{\delta\sigma\rho}. \tag{A2.21}$$

Après avoir introduit la notion de tenseur, on peut considérer un vecteur ordinaire (A2.19) comme un tenseur du premier rang. Une grandeur qui ne change pas sa valeur numérique lors de rotations des axes de coordonnées s'appelle grandeur scalaire ou tenseur de rang 0. Comme exemple de scalaire on peut indiquer le produit scalaire de vecteurs.

En plus de la rotation des axes de coordonnées, il existe encore une transformation orthogonale de coordonnées qui consiste à changer le signe de toutes les coordonnées à la fois (l'inversion). Cette opération n'est rien d'autre que le passage au système de coordonnées à gauche dont tous les axes sont dirigés dans des sens opposés aux axes du système donné.

Si un scalaire et un vecteur changent de signe lors d'une inversion, ils s'appellent respectivement pseudo-scalaire et vecteur polaire; dans le cas contraire, ils sont dits scalaire vrai et vecteur axial.

A l'inversion, un tenseur vrai de rang n est multiplié par $(-1)^n$ et un pseudo-tenseur par $(-1)^{n+1}$.

De même que la matrice (A2.1), un tenseur $T_{\alpha\beta}$ de rang 2 s'écrit parfois sous la forme d'un tableau

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \tag{A2.22}$$

C'est pourquoi, tout ce qui a été dit pour l'addition et la multiplication des matrices (A2.2) à (A2.11) s'applique également aux ten-

*) Puisque nous ne considérons que des bases orthonormées dans un espace euclidien à trois dimensions, il n'est pas nécessaire d'introduire des composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur.

seurs de rang 2. Les définitions (A2.13) à (A2.17) des matrices symétrique, antisymétrique et diagonale sont applicables, elles aussi. aux tenseurs.

Un tenseur $T^s_{\alpha\beta}T^a_{\beta\gamma}$ qui est le produit scalaire d'un tenseur symétrique $T^s_{\alpha\beta}$ et d'un tenseur antisymétrique $T^a_{\beta\gamma}$ jouit d'une propriété importante

$$T^s_{\alpha\beta}T^a_{\beta\alpha} = 0. \tag{A2.23}$$

La somme des composantes diagonales $T_{\alpha\alpha}$ d'un tenseur $T_{\alpha\beta}$ est appelée trace de ce tenseur. La trace d'un tenseur est une grandeur scalaire. Et en général, le résultat de la contraction d'un tenseur $T_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots}$ suivant ses deux indices quelconques, par exemple, $T_{\alpha\alpha\gamma\delta\ldots}$ est un nouveau tenseur dont le rang est de deux unités inférieur au rang du tenseur donné.

Le produit scalaire d'un tenseur $T_{\alpha\beta}$ et d'un vecteur A_β donne un nouveau vecteur

$$B_\alpha = T_{\alpha\beta}A_\beta. \tag{A2.24}$$

On appelle pseudo-tenseur unité complètement antisymétrique de rang 3 l'ensemble de 27 grandeurs $e_{\alpha\beta\gamma}$ qui changent de signe lors de la permutation de deux indices quelconques. Seules les composantes de ce tenseur, dont les indices α, β et γ sont différentes, ne sont pas nulles. Dans ces conditions, $e_{123} = 1$ et les autres composantes non nulles sont égales à 1 ou à -1 suivant que le nombre de permutations qui amènent la suite des nombres $\alpha\beta\gamma$ à la suite 123 est pair ou impair. Le tenseur $e_{\alpha\beta\gamma}$, de même que le tenseur unité $\delta_{\alpha\beta}$, se distinguent de tous les autres tenseurs par le fait qu'ils ont la même forme dans tous les systèmes de coordonnées cartésiennes.

En utilisant le tenseur $e_{\alpha\beta\gamma}$, on peut écrire le produit vectoriel de deux vecteurs sous la forme

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma. \tag{A2.25}$$

Quelques autres formules utiles:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix},$$

le second membre de la dernière égalité étant un déterminant composé de symboles de Kronecker (A2.7).

Annexe 3

FONCTION IMPULSION DE DIRAC

On appelle fonction impulsion de Dirac (on dit aussi fonction delta) une fonction $\delta(x - x_0)$ qui est partout nulle, sauf un point singulier $x = x_0$, où elle devient infinie de sorte que l'intégrale de cette fonction prise sur un intervalle quelconque contenant le point x_0 est égale à l'unité :

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \neq x_0, \\ \infty & \text{pour} \quad x = x_0; \end{cases} \tag{A3.1}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\, dx = 1 \quad \text{pour} \quad a < x_0 < b. \tag{A3.2}$$

Les propriétés les plus importantes de cette fonction sont exprimées par les égalités :

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{pour} \quad a < x_0 < b, \\ 0 & \text{pour} \quad x_0 < a \text{ ou } b < x_0, \end{cases} \tag{A3.3}$$

$$f(x)\, \delta(x-x_0) = f(x_0)\, \delta(x-x_0), \tag{A3.4}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_1)\, \delta(x-x_2)\, dx = \delta(x_1-x_2) \quad \text{pour} \quad a < x_1 < b \quad \text{ou} \quad a < x_2 < b, \tag{A3.5}$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{A3.6}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{A3.7}$$

$$|x|\, \delta(x^2 - \varepsilon) = \delta(x) \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \tag{A3.8}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x), \tag{A3.9}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\, [\delta(x-a) + \delta(x+a)], \tag{A3.10}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_n} \right|}\, \delta(x-x_n), \tag{A3.11}$$

où les grandeurs x_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) sont des racines simples de l'équation $f(x) = 0$ dans laquelle $f(x)$ est une fonction univoque dérivable. Dans les formules (A3.3) et (A3.4), la fonction $f(x)$ est continue. Les relations (A3.4) à (A3.11) doivent être interprétées dans ce sens que l'intégrale des deux membres des égalités écrites a la même valeur.

Puisque $\delta(x)$ est une fonction paire, on peut déduire des relations (A3.2) et (A3.3) pour $a = -b < 0$ et $x_0 = 0$ les égalités suivantes :

$$\int_0^b \delta(x)\,dx = \frac{1}{2}, \qquad \text{(A3.12)}$$

$$\int_0^b f(x)\,\delta(x) = \frac{1}{2} f(0). \qquad \text{(A3.13)}$$

L'intégrale comportant la dérivée $\frac{d}{dx}\delta(x - x_0)$ de la fonction delta est calculée par parties :

$$\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\delta(x - x_0)\,dx = -\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}, \qquad \text{(A3.14)}$$

où $a < x_0 < b$. Un cas particulier bien important de cette formule s'écrit parfois sous la forme

$$x\,\frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \qquad \text{(A3.15)}$$

On opère d'une manière analogue pour calculer l'intégrale comprenant des dérivées d'ordres supérieurs de la fonction delta :

$$\int_a^b f(x)\frac{d^n}{dx^n}\delta(x - x_0)\,dx = (-1)^n\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_{x=x_0}. \qquad \text{(A3.16)}$$

Il existe différentes représentations analytiques de la fonction delta. Les plus répandues d'entre elles sont de la forme :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin Lx}{x}. \qquad \text{(A3.17)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin^2 Lx}{Lx^2}, \qquad \text{(A3.18)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2}, \qquad \text{(A3.19)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\mu\to\infty}\mu e^{-\mu^2 x^2}. \qquad \text{(A3.20)}$$

Si les fonctions delta (A3.17) à (A3.20) sont placées sous le signe de l'intégrale, le passage à la limite se fait après le calcul de cette intégrale.

La fonction delta peut également être obtenue par dérivation de la fonction unité de Heaviside:

$$\eta(x-x_0)=\begin{cases}1 & \text{pour } x>x_0,\\ 0 & x<x_0,\end{cases} \tag{A3.21}$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{d}{dx}\eta(x-x_0). \tag{A3.22}$$

Voilà pourquoi la dérivée de la fonction discontinue

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{pour } x<x_0,\\ f_2(x) & \text{pour } x>x_0,\end{cases} \tag{A3.23}$$

$$f_2(x_0)-f_1(x_0)=h$$

s'écrit souvent sous la forme

$$\frac{df(x)}{dx}=h\delta(x-x_0)+\begin{cases}\dfrac{df_1(x)}{dx} & \text{pour } x<x_0,\\ \dfrac{df_2(x)}{dx} & \text{pour } x>x_0.\end{cases} \tag{A3.24}$$

Une image concrète de la fonction delta et de sa propriété fondamentale (A3.3) peut être obtenue en considérant par exemple le

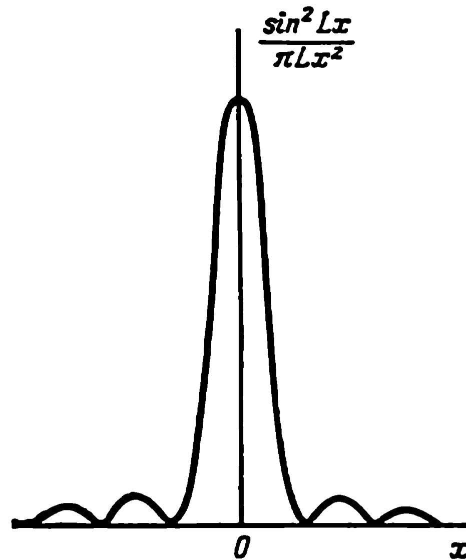


Fig. 28

graphique de la fonction $\frac{\sin^2 Lx}{\pi L x^2}$ pour une grande valeur du paramètre $L \gg 2\pi$ (fig. 28). En effet, dans ce cas, le maximum au point $x = 0$ est un maximum principal. Dans le voisinage du maximum principal, cette fonction affecte une forme en cloche ayant une hauteur L/π et une largeur $2\pi/L$ à la base. Cette dernière quantité est appelée largeur du maximum. De part et d'autre du maximum principal,

la fonction $\frac{\sin^2 Lx}{\pi L x^2}$ comporte une série infinie de maximums secondaires dont la hauteur décroît rapidement. Ils sont séparés par des minimums aux points $x = \frac{n\pi}{L}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Si le paramètre L tend vers l'infini, le maximum principal croît indéfiniment et se rétrécit, alors que les maximums secondaires diminuent continuellement. Il en résulte que quand $L \to \infty$, la fonction $\frac{\sin^2 Lx}{\pi L x^2}$ tend vers la limite exprimée par (A3.1).

Lorsque la valeur du paramètre L est suffisamment grande, le domaine d'intégration principal pour une fonction continue quelconque $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \frac{\sin^2 Lx}{\pi L x^2} dx \quad \text{pour} \quad a < 0 < b$$

coïncide avec la largeur du maximum principal de la fonction $\frac{\sin^2 Lx}{\pi L x^2}$. Dans le domaine du maximum principal, la fonction continue placée sous le signe de l'intégrale peut être remplacée par sa valeur au point $x = 0$. Un tel remplacement est d'autant plus précis que le paramètre L est plus grand et donc que le maximum principal est plus haut et plus étroit. Le facteur constant $f(0)$ peut être sorti de sous le signe somme, et à la limite quand $L \to \infty$, l'intégrale restante est égale à l'unité. On en déduit la propriété fondamentale (A3.3) de la fonction delta pour le cas où $x_0 = 0$.

Une fonction delta à trois dimensions est définie par la relation

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0). \qquad \text{(A3.25)}$$

La propriété principale de cette fonction est exprimée par l'égalité

$$\int_V f(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, dV = f(\mathbf{r}_0), \qquad \text{(A3.26)}$$

où le point de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ se situe à l'intérieur du volume d'intégration V dans lequel est donnée la fonction continue $f(\mathbf{r})$. Si ce point se trouve en dehors du volume V, l'intégrale (A3.26) est nulle.

La fonction delta à trois dimensions peut être commodément représentée sous la forme d'une intégrale triple dans un espace $\mathbf{k}$ illimité

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{kr}}\, d\mathbf{k}. \qquad \text{(A3.27)}$$

Une fonction delta à trois dimensions résulte par exemple de la dérivation suivante par rapport aux composantes du rayon vecteur $\mathbf{r}$:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \qquad \text{(A3.28)}$$

Annexe 4

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont solutions de l'équation différentielle (v. ouvrages [7] à [9])

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n=0, \qquad (A4.1)$$

où

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Quelques premiers polynômes ayant les indices $n = 0, 1, 2$ et 3 sont de la forme

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x). \qquad (A4.2)$$

Un polynôme de Legendre de degré n peut être calculé à l'aide de la formule

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \qquad (A4.3)$$

Les polynômes de Legendre possèdent les propriétés suivantes:

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \qquad (A4.4)$$

$$P_n(1)=1, \qquad (A4.5)$$

$$P_{2k+1}(0)=0, \qquad (A4.6)$$

$$P_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}, \qquad (A4.7)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \qquad (A4.8)$$

$$\int_{0}^{1} P_{2k+1}(x)\,dx=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!}, \qquad (A4.9)$$

$$\int_{0}^{1} P_{2k}(x)\,dx=\delta_{k0}. \qquad (A4.10)$$

Si les indices n et m sont simultanément pairs ou impairs, les polynômes vérifient l'égalité

$$\int_{0}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=\frac{1}{2n+1}\delta_{nm}. \qquad (A4.11)$$

Pour les polynômes sont valables les formules de récurrence:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad (A4.12)$$

$$(x^2-1)\,P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad (A4.13)$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)\,P_n(x), \qquad (A4.14)$$

le prime désignant la dérivée de la fonction $P_n(x)$ par rapport à l'argument x.

Les polynômes de Legendre forment une famille complète de fonctions orthogonales dans l'intervalle $[-1, +1]$. Il en résulte qu'une fonction arbitraire $f(x)$, deux fois dérivable et donnée dans cet intervalle, peut être développée en série:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \qquad (A4.15)$$

où

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx. \qquad (A4.16)$$

On prend souvent la fonction $x = \cos\theta$ en tant qu'argument des polynômes de Legendre. Dans ce cas, il faut changer la variable d'intégration dans les intégrales (A4.8) à (A4.11) et (A4.16) de sorte que l'équation de Legendre (A4.1) prend la forme

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + n\,(n+1)\,P_n(\cos\theta) = 0. \qquad (A4.17)$$

En comparant le premier membre de (A4.17) au laplacien en coordonnées sphériques (A1.46), on a pour $r \neq 0$, les relations utiles suivantes:

$$\nabla^2 P_n(\cos\theta) = -\frac{n\,(n+1)}{r^2}\,P_n(\cos\theta), \qquad (A4.18)$$

$$\nabla^2\left(r^n P_n(\cos\theta)\right) = 0, \quad \nabla^2\left(\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = 0. \qquad (A4.19)$$

Il en résulte que la solution de l'équation de Legendre $\nabla^2\varphi = 0$ est aussi une somme des polynômes de Legendre à coefficients a_n et b_n quelconques:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n + b_n r^{-n-1}\right) P_n(\cos\theta). \qquad (A4.20)$$

Annexe 5

FONCTIONS SPHÉRIQUES

Les fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \psi)$ sont définies par les formules *)

$$Y_{lm}(\theta, \psi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\psi}, \quad (A5.1)$$

où $-l \leqslant m \leqslant l$ et $l = 0, 1, 2, \ldots$, et $P_l^m(\cos\theta)$ sont les polynômes associés de Legendre:

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}. \quad (A5.2)$$

Ecrivons les neuf premières fonctions sphériques:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta,$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\psi}, \quad (A5.3)$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3\cos^2\theta),$$

$$Y_{2,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{\pm i\psi}, \quad (A5.4)$$

$$Y_{2,\pm 2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm i2\psi}.$$

Les fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \psi)$ fournissent des solutions bornées de l'équation différentielle

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dY_{lm}}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) Y_{lm} = 0. \quad (A5.5)$$

Aussi, lorsque le laplacien agit en coordonnées sphériques sur la fonction $Y_{lm}(\theta, \psi)$, cette dernière se reproduit:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \psi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \psi), \quad (A5.6)$$

où $r \neq 0$.

Parmi toutes les propriétés, bien nombreuses, dont jouissent les fonctions sphériques, signalons seulement celles qui sont utilisées dans le présent ouvrage **).

*) Le choix du facteur de normalisation correspond à la définition de la fonction sphérique adoptée en Mécanique quantique [10].

**) Voir pour plus de détails, par exemple, les ouvrages [7] et [9].

Les fonctions sphériques sont orthogonales sur la surface d'une sphère de rayon unité

$$\int Y^*_{lm}(\theta,\ \psi)\, Y_{l'm'}(\theta,\ \psi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \qquad \text{(A5.7)}$$

où $d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi$ est un élément d'angle solide. Pour $m = 0$, la fonction sphérique est exprimée par le polynôme de Legendre

$$Y_{l0} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta) \qquad \text{(A5.8)}$$

et est indépendante de l'angle azimutal ψ. Les relations intégrales qui conduisent aux fonctions Y_{l0} sont les suivantes:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta,\ \psi)\, d\psi = 2\pi\delta_{0m} Y_{l0}, \qquad \text{(A5.9)}$$

$$\int_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta,\ \psi)\, Y_{l'm'}(\theta,\ \psi)\, d\psi = 2\pi\delta_{mm'} Y^*_{l0} Y_{l'0}. \qquad \text{(A5.10)}$$

Les développements en série suivant les fonctions sphériques qui s'avèrent de très grande utilité pour le calcul d'un potentiel sont les suivants:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta,\ \psi)\, Y_{lm}(\theta',\ \psi')\ (r > r'), \qquad \text{(A5.11)}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\ \psi')\, Y_{lm}(\theta,\ \psi)\ (r' > r), \qquad \text{(A5.12)}$$

où r, θ et ψ sont les coordonnées sphériques du point de rayon vecteur $\mathbf{r}$. Des grandeurs analogues se rapportant à un autre point de l'espace sont affectées de prime.

Annexe 6

FONCTIONS CYLINDRIQUES

Les fonctions cylindriques $Z_\nu(x)$ sont solutions de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dZ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu = 0, \qquad \text{(A6.1)}$$

où $0 \leqslant x \leqslant \infty$ et ν est un certain paramètre.

La solution $J_\nu(x)$ de l'équation (A6.1) est appelée fonction de Bessel d'ordre ν ou fonction cylindrique de première espèce

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad \text{(A6.2)}$$

où $\Gamma(s)$ est une fonction gamma qui est définie, pour $\mathrm{Re}\, s > 0$, par la formule:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{s-1}\, d\xi. \qquad \text{(A6.3)}$$

Les propriétés principales de la fonction gamma sont:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0) = \infty. \qquad \text{(A6.4)}$$

Si n est un nombre naturel, il résulte des relations (A6.4) que $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(-n) = (-1)^n \cdot \infty$.

Une deuxième solution linéairement indépendante de l'équation de Bessel devient égale à l'infini au point $x = 0$. Si le paramètre ν n'est pas un nombre entier, une telle solution est fournie par la fonction $J_{-\nu}(x)$ ou la fonction de Neumann

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \qquad \text{(A6.5)}$$

que l'on appelle aussi fonction cylindrique de deuxième espèce.

Dans le cas où le paramètre est un nombre entier $\nu = n$ ainsi que pour $\nu = 0$, est vérifiée la relation $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ qui montre que les fonctions $J_{-n}(x)$ et $J_n(x)$ sont linéairement dépendantes. Voilà pourquoi, pour $\nu = n$ ou $\nu = 0$, on prend comme deuxième solution linéairement indépendante de l'équation de Bessel la fonction de Neumann

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \qquad \text{(A6.6)}$$

où $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans certains cas il y a avantage à utiliser pour la fonction de Bessel d'ordre entier n la représentation intégrale

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \sin \varphi)}\, d\varphi = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)}\, d\varphi. \qquad \text{(A6.7)}$$

Les fonctions $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ et $e^{in\varphi}$ étant périodiques, l'expression (A6.7) peut être intégrée sur un intervalle quelconque de φ_0 à $\varphi_0 + 2\pi$ où φ_0 est un nombre réel arbitraire et $n = 0, 1, 2, \ldots$

Comme solutions des équations de Bessel on utilise aussi des fonctions cylindriques de troisième espèce (fonctions de Hankel)

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad \text{(A6.8)}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \qquad \text{(A6.9)}$$

Ici, $H_\nu^{(1)}(x)$ et $H_\nu^{(2)}(x)$ sont les fonctions de Hankel de première et deuxième espèces de rang ν. Ces dernières s'écrivent souvent

sous forme d'intégrales

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t+ix\,\mathrm{ch}\,t}\,dt, \qquad (A6.10)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=-\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t-ix\,\mathrm{ch}\,t}\,dt, \qquad (A6.11)$$

dans lesquelles le paramètre ν et la variable x peuvent prendre des valeurs complexes si l'on considère des prolongements analytiques de ces fonctions dans le plan complexe [8, 9].

Les fonctions cylindriques de première, de deuxième et de troisième espèces étant linéairement indépendantes, la solution générale des équations de Bessel peut être représentée sous la forme d'une combinaison linéaire, à coefficients arbitraires, de deux quelconques des fonctions cylindriques indiquées.

Signalons certaines propriétés des fonctions cylindriques:

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), \qquad (A6.12)$$

$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2\,\frac{dZ_\nu(x)}{dx}, \qquad (A6.13)$$

$$\frac{dZ_0(x)}{dx}=-Z_1(x), \qquad (A6.14)$$

$$\int_0^x \xi Z_0(\xi)\,d\xi=xZ_1(x), \qquad (A6.15)$$

où la fonction cylindrique $Z_\nu(x)$ peut être représentée par l'une quelconque des fonctions $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ et $H_\nu^{(2)}(x)$.

Les représentations approchées des fonctions cylindriques, valables pour de faibles valeurs de l'argument $|x| \ll 1$, sont les suivantes:

$$J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \qquad (A6.16)$$

$$N_n(x)=-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \quad \text{pour } n\geqslant 1, \qquad (A6.17)$$

$$N_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right), \qquad (A6.18)$$

où $C = 0{,}5772$. La représentation approchée des fonctions de Hankel est obtenue à partir des formules (A6.8) et (A6.9) à l'aide des relations (A6.16) à (A6.18).

Les expressions asymptotiques pour de grandes valeurs de l'argument $|x| \gg 1$ sont les suivantes:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{(A6.19)}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{(A6.20)}$$

alors que les expressions correspondantes pour les fonctions de Hankel peuvent être obtenues à partir des formules (A6.8) et (A6.9), compte tenu des relations (A6.19) et (A6.20).

La résolution de nombreux problèmes de Physique aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) y = 0, \qquad \text{(A6.21)}$$

dont la solution est généralement exprimée par les fonctions de Bessel $J_\nu(\lambda r)$ et les fonctions de Neumann $N_\nu(\lambda r)$ de l'argument $x = \lambda r$:

$$y = c_1 J_\nu(\lambda r) + c_2 N_\nu(\lambda r), \qquad \text{(A6.22)}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires qui se déterminent par les conditions aux limites de l'équation (A6.21), alors que le paramètre ν peut prendre aussi des valeurs entières.

La fonction $f(r)$, qui est continue dans l'intervalle $(0, \infty)$, peut être développée en intégrale de Fourier-Bessel:

$$f(r) = \int_0^\infty c_\lambda J_n(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda, \qquad \text{(A6.23)}$$

où n est un entier quelconque ou zéro et le coefficient du développement c_λ s'exprime par l'intégrale

$$c_\lambda = \int_0^\infty f(r) J_n(\lambda r)\, r\, dr. \qquad \text{(A6.24)}$$

Les fonctions de Bessel $J_n(\lambda r)$ et $J_n(\lambda' r)$ à valeurs différentes du paramètre λ sont orthogonales dans le sens suivant:

$$\int_0^\infty J_n(\lambda r) J_n(\lambda' r)\, r\, dr = \frac{1}{\lambda}\delta(\lambda - \lambda'). \qquad \text{(A6.25)}$$

Pour que la fonction $f(r)$ soit développable en intégrale de Fourier-Bessel, elle doit être continue par morceaux et présenter un nombre

fini de maximums et de minimums dans tout intervalle fini de variation de l'argument r et, de plus, l'intégrale

$$\int_0^\infty f(r)\sqrt{r}\,dr. \qquad \text{(A6.26)}$$

doit être absolument convergente.

Annexe 7

CALCUL TENSORIEL DANS L'ESPACE PSEUDO-EUCLIDIEN

On convient de caractériser un événement réalisé par des coordonnées X, Y, Z et un temps t. On appelle intervalle entre deux événements x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 une grandeur S_{21} dont le carré est donné par l'expression

$$S_{21}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \qquad \text{(A7.1)}$$

Suivant les thèses fondamentales de la théorie de la relativité, l'intervalle entre deux événements identiques a la même forme et la même valeur numérique dans tous les systèmes de référence galiléens. En d'autres termes, la forme quadratique (A7.1) est un invariant, c'est-à-dire elle est indépendante du choix du référentiel galiléen.

Vu cette circonstance, il y a intérêt à réunir l'espace à trois dimensions ordinaire et le temps en un seul espace à quatre dimensions dont tout point est caractérisé par un quadrirayon vecteur x^i de composantes

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z. \qquad \text{(A7.2)}$$

Dans cet espace à quatre dimensions, le carré de la distance entre deux points est déterminé par la forme quadratique (A7.1) alors que le carré du quadrirayon vecteur s'exprime par

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = g_{ik}x^i x^k, \qquad \text{(A7.3)}$$

où g_{ik} est un tenseur métrique

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(A7.4)}$$

Le premier indice $i = 0, 1, 2, 3$ se rapporte aux lignes du tableau (A7.4) et le deuxième, k, aux colonnes. On suppose que sur des indices « muets » qui se répètent et dont l'un est placé en haut et l'autre en bas, la sommation se fait partout de 0 à 3. Un espace défini par la métrique (A7.3) est dit pseudo-euclidien.

Lors du passage à un autre système de coordonnées à quatre dimensions, les composantes du quadrirayon vecteur (A7.2) se transforment selon la formule

$$x^i = a^i_k x'^k, \tag{A7.5}$$

où l'ensemble des coefficients a^i_k forme une matrice de transformation linéaire qui décrit le passage du système de coordonnées affectées de prime au système sans prime. L'indice supérieur du coefficient a^i_k indique le numéro de la ligne et l'indice inférieur le numéro de la colonne de cette matrice.

Le passage inverse au système de coordonnées initial se fait selon la formule

$$x'^i = \bar{a}^i_k x^k, \tag{A7.6}$$

où l'ensemble des coefficients $\bar{a}^i_k$ forme une matrice de transformation inverse, telle que

$$\bar{a}^i_l a^l_k = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = k, \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{A7.7}$$

Puisque dans l'espace à quatre dimensions considéré le passage à un autre système de coordonnées ne change pas la forme quadratique (A7.3), les matrices de transformation (A7.5) et (A7.6) satisfont aux relations

$$g_{ik} a^i_l a^k_m = g_{lm}, \quad g_{ik} \bar{a}^i_l \bar{a}^k_m = g_{lm}. \tag{A7.8}$$

Dans l'espace à quatre dimensions, au passage d'un référentiel galiléen à un autre correspond le passage d'un système de coordonnées à un autre, qui est tourné par rapport au premier d'un certain angle dans le plan X^0X^1. La transformation des composantes du quadrirayon vecteur correspondant à une telle rotation porte le nom de transformation de Lorentz. Elle se décrit par la formule (A7.5) dans laquelle la matrice de transformation est de la forme :

$$a^i_k = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{A7.9}$$

La matrice de transformation inverse de Lorentz est obtenue à partir de (A7.9) en changeant le signe de la vitesse V.

On appelle quadrivecteur A^i l'ensemble de quatre grandeurs A^0, A^1, A^2 et A^3 qui se transforment, lors du passage d'un système

de coordonnées à quatre dimensions à un autre, comme les composantes du quadrirayon vecteur

$$A^i = a^i_k A'^k, \quad A'^i = \bar{a}^i_k A^k. \qquad \text{(A7.10)}$$

Par analogie avec le quadrirayon vecteur (A7.2), la première composante A^0 du quadrivecteur A^i est dite temporelle et les trois autres A^1, A^2 et A^3 s'appellent composantes spatiales. Ces composantes s'écrivent parfois sous une forme explicite en introduisant pour le quadrivecteur la notation suivante:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}). \qquad \text{(A7.11)}$$

De même que dans le cas du quadrirayon vecteur, la forme quadratique

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2, \qquad \text{(A7.12)}$$

formée des composantes de tout quadrivecteur A^i est un invariant. On l'appelle carré du quadrivecteur. Le carré d'un quadrivecteur peut être positif, négatif ou nul. De tels vecteurs sont appelés respectivement quadrivecteurs du genre temps, quadrivecteurs du genre espace et quadrivecteurs nuls.

Dans l'espace pseudo-euclidien, on introduit, par raison de commodité, deux variétés de composantes d'un quadrivecteur. On affecte de l'indice supérieur les composantes contravariantes A^i d'un quadrivecteur et de l'indice inférieur les composantes covariantes A_i du même quadrivecteur, ces deux variétés de composantes étant

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3. \qquad \text{(A7.13)}$$

Les composantes covariantes et contravariantes d'un quadrivecteur sont reliées entre elles à l'aide d'un tenseur métrique covariant g_{ik} et d'un tenseur métrique contravariant g^{ik} de la manière suivante:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \qquad \text{(A7.14)}$$

Ainsi, un même quadrivecteur peut être représenté soit par ses composantes contravariantes, soit par ses composantes covariantes:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}),\ A_i = (A^0, -\mathbf{A}). \qquad \text{(A7.15)}$$

Avec ces notations, le carré du quadrivecteur (A7.12) s'écrit sous la forme

$$A_0A^0 + A_1A^1 + A_2A^2 + A_3A^3 = A_iA^i. \qquad \text{(A7.16)}$$

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs A_i et B^i est défini, par analogie avec l'expression (A7.16), par la relation

$$A_iB^i = A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3. \qquad \text{(A7.17)}$$

Un seul et même produit scalaire peut s'écrire de différentes façons

$$A_iB^i = A^iB_i = g_{ih}A^iB^h = g^{ih}A_iB_k =$$
$$= A_0B^0 - \mathbf{AB} = A^0B_0 - \mathbf{AB}. \quad \text{(A7.18)}$$

On appelle scalaire à quatre dimensions (quadriscalaire) une grandeur qui ne change pas sa forme et sa valeur numérique lors du passage à tout système de coordonnées à quatre dimensions tourné. C'est ainsi par exemple que le produit scalaire de quadrivecteurs est invariant par rapport à toute rotation du système de coordonnées à quatre dimensions et, par conséquent, par rapport à la transformation de Lorentz. Cela signifie que le produit scalaire des quadrivecteurs est un quadriscalaire.

Puisque le carré d'un quadrirayon vecteur x_kx^k est un quadriscalaire, les composantes covariantes x_k du quadrirayon vecteur se transforment, lors du passage à un autre système de coordonnées à quatre dimensions, selon la loi

$$x_k = x'_i\bar{a}^i_k, \quad x'_k = x_ia^i_k, \quad \text{(A7.19)}$$

où les coefficients a^i_k et $\bar{a}^i_k$ forment les mêmes matrices que dans le cas de la transformation des composantes contravariantes (A7.5) et (A7.6). Les composantes covariantes de tout vecteur se transforment selon les formules (A7.19).

La différentielle

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}dx^i \quad \text{(A7.20)}$$

d'un quadriscalaire Φ est aussi un quadriscalaire. Dans cette expression, elle est représentée sous forme de produit scalaire des opérateurs de dérivation $\partial/\partial x^i$ et des composantes contravariantes dx^i du quadrivecteur. Il en résulte que les opérateurs $\partial/\partial x^i$ de dérivation par rapport aux coordonnées x^i doivent être considérés comme composantes covariantes d'un quadrivecteur opérationnel. De façon analogue, les opérateurs $\partial/\partial x_i$ de dérivation par rapport aux composantes covariantes x_i d'un quadrirayon vecteur sont des composantes contravariantes d'un quadrivecteur opérationnel de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right). \quad \text{(A7.21)}$$

Le quadrigradient d'un quadriscalaire Φ est un quadrivecteur

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \nabla\Phi\right). \quad \text{(A7.22)}$$

La quadridivergence d'un quadrivecteur A^i est définie par la relation

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{A}. \quad \text{(A7.23)}$$

On appelle tenseur à quatre dimensions (quadritenseur) de rang 2 l'ensemble de seize grandeurs T^{ik} qui lors du passage d'un système de coordonnées à quatre dimensions à un autre se transforment com-

me les produits de composantes du quadrirayon vecteur:

$$T^{ik} = a_l^i a_m^k T'^{lm}, \quad T'^{ik} = \bar{a}_l^i \bar{a}_m^k T^{lm}. \qquad \text{(A7.24)}$$

On définit de même un quadritenseur de rang plus élevé. Le quadrivecteur et le quadriscalaire introduits ci-dessus peuvent être considérés comme des quadritenseurs respectivement de rang 1 et de rang 0.

Un même quadritenseur peut être représenté soit par ses composantes contravariantes T^{ik} affectées d'indices supérieurs, soit par ses composantes covariantes T_{ik}, dont les indices sont placés en bas, soit enfin par les composantes mixtes $T^i{}_k$. Dans ce dernier cas, le premier indice peut être placé en bas et le deuxième en haut, ce qui indiquera d'autres composantes mixtes $T_i{}^k$ du quadritenseur donné.

Pareillement à ce que l'on a obtenu avec les formules (A7.14), la relation entre différentes formes des composantes d'un quadritenseur peut être établie à l'aide des tenseurs métriques covariant et contravariant, par exemple

$$T_{ik} = g_{il} g_{km} T^{lm}, \quad T_{ik} = g_{kl} T_i{}^l, \quad T_i{}^k = g_{il} g^{km} T^l{}_m. \qquad \text{(A7.25)}$$

En d'autres termes, l'élévation ou l'abaissement de l'indice temporel 0 ne change pas la composante correspondante d'un quadritenseur alors que la même opération effectuée sur l'un des indices spatiaux 1, 2 ou 3 inverse le signe de la composante.

Si $T^{ik} = T^{ki}$, le tenseur T^{ik} est dit symétrique, alors que dans le cas où $T^{ik} = -T^{ki}$ il est dit antisymétrique. Les composantes mixtes d'un tenseur symétrique coïncident: $T^i_k = T_k{}^i$, c'est pourquoi on les note T^i_k en plaçant les indices l'un au-dessus de l'autre.

Dans le calcul tensoriel, les opérations algébriques essentielles sont l'addition, la multiplication et la contraction.

On appelle somme de deux tenseurs $A^i{}_{km}$ et $B^i{}_{km}$ un tenseur $C^i{}_{km}$ de composantes $C^i{}_{km} = A^i{}_{km} + B^i{}_{km}$. En d'autres termes, pour l'addition de tenseurs ayant même forme et même rang, on additionne leurs composantes de même nom, et de plus de deux côtés de toute égalité tensorielle doivent se trouver des tenseurs ayant mêmes indices libres placés dans mêmes positions.

On appelle produit de tenseurs un tenseur dont les composantes sont égales aux produits des composantes et dont le rang est égal à la somme des rangs des tenseurs à multiplier. C'est ainsi par exemple que le produit de deux tenseurs A^{ik} et B_{lm} donne un nouveau tenseur $C^{ik}{}_{lm}$ de composantes $C^{ik}{}_{lm} = A^{ik} B_{lm}$.

On appelle contraction d'un tenseur la sommation sur une paire d'indices dont l'un est covariant et l'autre contravariant. Le résultat de la contraction est un nouveau tenseur dont le rang est de deux unités inférieur à celui du tenseur primitif.

La somme

$$T_i^{\ i} = T_0^{\ 0} + T_1^{\ 1} + T_2^{\ 2} + T_3^{\ 3} \qquad \text{(A7.26)}$$

obtenue par suite de la contraction d'un tenseur T^{ik} s'appelle sa trace. Il est évident que $T^i_{\ i} = T_i^{\ i}$.

Si la multiplication est suivie de la contraction, une telle opération s'appelle multiplication scalaire ou multiplication contractée. Par exemple, le produit scalaire d'un vecteur A_i et d'un tenseur T^{ik} est un nouveau vecteur B^k:

$$A_i T^{ik} = B^k. \qquad \text{(A7.27)}$$

Le quadritenseur unité δ_k^i est défini par la relation

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k, \\ 0 & \text{pour } i \neq k. \end{cases} \qquad \text{(A7.28)}$$

Sa trace est égale à quatre $\delta_i^{\ i} = 4$. Le quadritenseur unité δ^i a, de même que les tenseurs métriques g_{ik} et g^{ik} la même forme dans tous les systèmes de coordonnées à quatre dimensions.

Si les tenseurs A^{ik} et B_{ik} vérifient l'égalité

$$A^{il} B_{lk} = \delta_k^i, \qquad \text{(A7.29)}$$

ils sont dits inverses l'un de l'autre. C'est ainsi par exemple que le tenseur métrique covariant g_{ik} est l'inverse du tenseur métrique contravariant g^{ik}.

En plus des tenseurs δ_k^i, g_{ik} et g^{ik}, il existe encore un quadritenseur qui ne change pas lors du passage à un autre système de coordonnées. C'est un pseudo-tenseur unité à quatre dimensions, complètement antisymétrique, de rang $4e^{iklm}$. Ses composantes changent de signe lors de la permutation de deux indices quelconques. C'est pourquoi, les seules composantes non nulles sont celles dont les indices i, k, l et m sont différents. Dans ces conditions on a $e^{0123} = 1$, alors que les autres composantes non nulles sont égales à 1 ou à -1 suivant que le nombre de permutations nécessaires pour amener la suite de nombres donnée $iklm$ à la suite 0123 est pair ou impair. Pour le tenseur e_{iklm} on a $e_{0123} = -1$, de plus

$$e^{iklm} e_{iklm} = -4! = -24. \qquad \text{(A7.30)}$$

Les composantes d'un quadritenseur vrai de rang 4 dont l'un des indices est temporel et trois autres spatiaux (ou inversement) changent de signe par suite de l'inversion. Au contraire, les composantes de e^{iklm} ne changent pas même à l'inversion parce que, par définition, elles ont une seule et même forme dans tous les systèmes de coordonnéees. Voilà pourquoi e^{iklm} n'est pas un quadritenseur vrai mais un pseudotenseur à quatre dimensions.

La généralisation du théorème d'Ostrogradsky-Gauss au cas de

l'espace pseudo-euclidien à quatre dimensions s'écrit sous la forme

$$\oint A^i\, dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\, d\Omega, \qquad \text{(A7.31)}$$

A^i étant un certain quadrivecteur, $d\Omega = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ un élément de volume dans l'espace à quatre dimensions et dS_i un quadrivecteur d'élément d'hypersurface dont les composantes contravariantes sont $dS^0 = dx^1\, dx^2\, dx^3$, $dS^1 = dx^0\, dx^2\, dx^3$, $dS^2 = dx^0\, dx^1\, dx^3$ et $dS^3 = dx^0\, dx^1\, dx^2$. Au premier membre de l'égalité (A7.31), l'intégrale est étendue sur une hypersurface fermée et au second membre, elle est prise sur le volume à quatre dimensions limité par cette hypersurface.

Chaque grandeur physique vectorielle peut être représentée, suivant la commodité, aussi bien par ses composantes contravariantes que par ses composantes covariantes. Il en est de même pour les grandeurs tensorielles. Avec les notations adoptées, le quadriimpulsion p^i, le quadrivecteur densité de courant j^i et le quadripotentiel A^i s'écrivent sous la forme

$$p^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c},\ \mathbf{p}\right), \quad j^i = (c\rho,\ \mathbf{j}), \quad A^i = (\varphi,\ \mathbf{A}). \qquad \text{(A7.32)}$$

L'interprétation physique des grandeurs utilisées ici est donnée dans l'introduction théorique au chapitre V.

Le tenseur de champ électromagnétique

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \qquad \text{(A7.33)}$$

a la forme

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(A7.34)}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(A7.35)}$$

La forme covariante des équations de Maxwell est

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \qquad \text{(A7.36)}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \qquad \text{(A7.37)}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion de champ électromagnétique est

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^{k}{}_{l} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm}\right). \qquad \text{(A7.38)}$$

Ce tenseur est symétrique et sa trace est nulle. Le sens physique des différentes composantes du tenseur d'énergie-impulsion découle du tableau suivant:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & s_x/c & s_y/c & s_z/c \\ s_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ s_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ s_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix}, \qquad \text{(A7.39)}$$

où w est la densité d'énergie du champ électromagnétique, s le vecteur de Poynting et $T_{\alpha\beta}$ le tenseur de tensions de Maxwell (V.38).

L'équation du mouvement d'une particule de masse m et de charge e dans un champ électromagnétique extérieur est

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \qquad \text{(A7.40)}$$

où $ds = cdt\sqrt{1-v^2/c^2}$ et $u^i = (u^0, \mathbf{u})$ est une vitesse à quatre dimensions dont les composantes sont exprimées par la vitesse v de la particule de façon suivante:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad \text{(A7.41)}$$

Dans le cas où une particule chargée se déplace avec une vitesse de l'ordre de la vitesse de la lumière, il faut introduire dans le second membre de l'équation du mouvement (A7.40) encore une force à quatre dimensions

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5} F^{il} F_{kl} u^k + \frac{2e^4}{3m^2c^5} (F_{kl}u^l)(F^{km}u_m) u^i, \qquad \text{(A7.42)}$$

qui tient compte du freinage dû au rayonnement. Les composantes temporelle et spatiale de la force à quatre dimensions g^i sont liées à la force à trois dimensions f du frottement de rayonnement par la formule générale

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{vf}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \qquad \text{(A7.43)}$$

Quand la vitesse d'une particule chargée s'approche de la vitesse de la lumière, la force à trois dimensions du frottement de rayonnement prend la forme

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} (F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,\mathbf{v}. \qquad \text{(A7.44)}$$

Si l'on dirige l'axe des X le long de la vitesse v de la particule, on peut déduire de (A7.44) l'expression (V.65).

TABLE DES MATIÈRES

